

# Tensorprodukte von $C^*$ -Algebren und vollständig positive Operatoren

Dissertation

der Mathematischen Fakultät  
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

**Hartmut Zillmann**  
aus Schötmar

~~1983~~  
1984





Digitized by the Internet Archive  
in 2026



# **Tensorprodukte von $C^*$ -Algebren und vollständig positive Operatoren**

Dissertation

der Mathematischen Fakultät  
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

**Hartmut Zillmann**  
aus Schötmar

1983

Tag der mündlichen Qualifikation: 14. November 1984

Dekan: Prof. Dr. W. Kaup

1. Berichterstatter: Prof. Dr. U. Schlotterbeck

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. H. Schaefer

für Gabi



## INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Einleitung .....                                                                                                    | 3  |
| 1. $C^*$ -Tensornormen .....                                                                                        | 16 |
| 2. Tensorprodukte von $C^*$ -Algebren und<br>vollständig positive Operatoren .....                                  | 27 |
| 3. Injektive Varianten der maximalen<br>$C^*$ -Tensornorm und fortsetzbare vollständig<br>positive Operatoren ..... | 45 |
| 4. Der Absolutbetrag von Operatoren<br>$T \in \mathcal{L}(M_n, A)$ .....                                            | 60 |
| 5. Absolutbetrag und Jordan-Zerlegung von<br>Operatoren $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ .....                           | 76 |
| Literaturverzeichnis .....                                                                                          | 93 |



## EINLEITUNG

Tensorprodukt-Methoden in der Operatorentheorie für Banach-Räume bzw. Banach-Verbände nach der von A.Grothendieck entwickelten Theorie ([16]) haben sich als sehr fruchtbar erwiesen. Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit waren Überlegungen, inwieweit ähnliche Methoden die operatorentheoretische Diskussion für  $C^*$ -Algebren bereichern können. - A.Grothendiecks Theorie kann, vom methodischen Gehalt her, auf die folgende kurze Formel gebracht werden: Sind  $E$  und  $F$  Banach-Räume und  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , so bestimmt  $T$  (in kanonischer Weise) eine Linearform  $\phi(T)$  auf  $E \otimes F'$ . Ist  $\alpha$  eine Tensornorm, so ist die Stetigkeit von  $\phi(T)$  auf  $E \otimes_\alpha F'$  typisch für gewisse Eigenschaften des Operators  $T$ . Es gibt eine (kanonische) Abbildung  $\gamma_\alpha: E' \otimes_\alpha F \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ , die stetig ist mit der Norm  $\leq 1$ . Für eine Tensornorm  $\alpha$  bestimmt  $E' \otimes_\alpha F$  einen für  $\alpha$  typischen Raum kompakter Operatoren von  $E$  in  $F$ . A.Grothendieck studierte nun den Raum der Operatoren vom Typ  $\alpha$  ( $\alpha$  eine Tensornorm), d.h. Operatoren  $T$  mit der Eigenschaft, daß  $\phi(T)$  stetig ist auf  $E \otimes_\alpha F'$ , versehen mit der Norm  $\alpha(T) := \|\phi(T)\|$ . Es ist  $\|T\| \leq \alpha(T)$ .  $\gamma_\alpha(E' \otimes_\alpha F)$ , versehen mit der von  $E' \otimes_\alpha F / \gamma_\alpha^{-1}(0)$  induzierten Norm, nannte A.Grothendieck den Raum der  $\alpha$ -nuklearen Operatoren.

Dieser Ansatz stößt jedoch innerhalb der Theorie der  $C^*$ -Algebren auf die systematische Ungereimtheit

hybrider Tensorprodukte. Hinzu kommt, daß bisher nur zwei  $C^*$ -Tensornormen bekannt sind; als Grundlage einer Operatorentheorie ist die Theorie der Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren also schon von daher schmal. Die Forschung allerdings hat längst die intuitive Nähe von vollständig positiven Operatoren zwischen  $C^*$ -Algebren und positiven Linearformen auf  $C^*$ -Algebren ausgenutzt; es sei hier nur an den berühmten Darstellungssatz von W.F.Stinespring und an die Ergebnisse von G.Wittstock erinnert ([39]). Ein Versuch, Tensorprodukt-Methoden innerhalb der Operatorentheorie für  $C^*$ -Algebren zur Anwendung zu bringen, erscheint deshalb interessant. Der strukturelle Reichtum der  $C^*$ -Algebren bringt es dabei mit sich, daß sich neben den (topologischen) Problemen der Typisierung von Operatoren ein weites Feld ordnungstheoretischer Fragen auftut. Diese stehen hier sogar im Vordergrund.

Die Anfänge einer Tensorprodukt-Theorie für  $C^*$ -Algebren liegen etwa drei Jahrzehnte zurück. T.Turumaru diskutierte 1952 das Problem, das Tensorprodukt zweier  $C^*$ -Algebren so zu normieren, daß die zugehörige Kompletisierung eine  $C^*$ -Algebra wird ([33]; [34]; [35]; [36]). M.Takesaki gelang es 1964 zu zeigen, daß es unter derartigen (nicht eindeutig bestimmten)  $C^*$ -Tensornormen eine kleinste gibt (min). Die Entdeckung der größten  $C^*$ -Tensornorm (max) erfolgte bald darauf durch A.Guichardet. Der Forschungsschwerpunkt lag seitdem

bei der vom  $C^*$ -Standpunkt sehr wichtigen Frage nach der Nuklearität einer  $C^*$ -Algebra; eine  $C^*$ -Algebra  $A$  heißt nuklear, wenn  $A \overset{\otimes}{\min} B = A \overset{\otimes}{\max} B$  für jede  $C^*$ -Algebra  $B$ . Wesentlichen Anteil an der Entwicklung dieser Fragestellung hatten S.Sakai und M.Takesaki. Die Bemühungen gipfelten schließlich in einer von M.-D.Choi, E.G.Effros und C.Lance bewiesenen Charakterisierung der nuklearen  $C^*$ -Algebren ([8]; [10]; [18]). - Eine operatorentheoretisch motivierte Untersuchung von Tensorprodukten von  $C^*$ -Algebren muß allerdings diese Linie verlassen: Die Fragestellung erfordert eine prinzipielle Offenheit für den nicht-nuklearen Fall.

Das erste Kapitel dieser Arbeit entwickelt deshalb auf abstrakter Basis die grundlegenden Zusammenhänge der Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren. Dabei konnte zum Teil auf die Ergebnisse von E.G.Effros und C.Lance zurückgegriffen werden ([13]; [15]; [18]; [19]). Ziel ist, eine systematische Sprechweise über  $C^*$ -Tensornormen zu gewinnen. Die Schwerpunkte liegen hier bei den Charakterisierungen 1.4 und 1.6 von  $C^*$ -Normen auf  $A \otimes B$  ( $A, B$   $C^*$ -Algebren):  $C^*$ -Normen auf  $A \otimes B$  sind durch trennende, invariante Teilmengen des maximalen Zustandsraumes bestimmt; neben dieser beweistechnisch sehr nützlichen Tatsache, ergibt sich eine geometrische Charakterisierung der Zustandsräume von  $C^*$ -Normen auf  $A \otimes B$  als trennende,  $\sigma$ -abgeschlossene Splitseiten des

maximalen Zustandsraums.

Der zweite Abschnitt bemüht sich, Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren in die operatorentheoretische Problematik der  $C^*$ -Algebren einzubinden. Ausgangspunkt dafür sind die zentralen Zusammenhänge der Tomita-Takesaki-Theorie und der sog. "Kommutanten Radon-Nikodym-Satz": Ist  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\varphi$ , so gibt es einen injektiven, konjugiertlinearen, vollständig positiven Operator  $j_\varphi: M \longrightarrow M_*$ ,  $\|j_\varphi\| \leq 1$ ,  $\overline{j_\varphi(M)}^{l.h.} = M_*$ ;  $j_\varphi^{-1}: j_\varphi(M) \longrightarrow M$  ist vollständig positiv. - Mit Hilfe dieser Zusammenhänge wird ein  $C^*$ -theoretisches Analogon der  $\alpha$ -nuklearen Operatoren diskutiert: Es gibt eine Abbildung  $\nu_\alpha^\varphi$  von  ${}_K M \tilde{\otimes}_\alpha A$  in  $\mathcal{L}(M, A)$  ( $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\alpha$  eine  $C^*$ -Tensor-norm), die ordnungstheoretisch befriedigende Eigenschaften hat (2.2; 2.2, Kor.1). Die Operatoren aus dem Bild von  ${}_K M \tilde{\otimes}_\alpha A$  unter  $\nu_\alpha^\varphi$  sind kompakt und vollständig beschränkt.  $\nu_{\min}^\varphi$  bettet  ${}_K M \tilde{\otimes}_{\min} A$  ordnungsisomorph in  $\mathcal{L}(M, A)$  ein, wobei in  $\mathcal{L}(M, A)$  der Kegel der vollständig positiven Operatoren zugrunde liege (2.4). - Ist andererseits  $T \in \mathcal{L}(A, M)$ , so kann  $T$ , ebenfalls mit Hilfe der oben geschilderten Zusammenhänge, eine Linearform  $\phi^\varphi(T)$  auf  ${}_K A \tilde{\otimes} M$  zugeordnet werden. Diese Zuordnung hat ordnungstheoretisch befriedigende Eigenschaften (2.5). Für jeden vollständig positiven Operator  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  ist  $\phi^\varphi(T)$  stetig auf  ${}_K A \tilde{\otimes}_{\max} M$  (2.6). Die Zuordnung  $T \longmapsto \phi^\varphi(T)$  ist nicht kanonisch; deshalb wird in 2.7 untersucht, inwiefern

die Linearform  $\phi^e(T)$  den Operator  $T$  beschreibt: Ist  $T$  vollständig positiv, so kann  $\pi_e T$ , im Sinne einer Stinespring-Zerlegung auf  $\overline{H_{\phi^e(T)}}$ , durch die Darstellung  $\pi_{\phi^e(T)}$  erklärt werden. - Das Beispiel der  $\sigma$ -endlichen  $W^*$ -Algebra  $M_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) soll diese Zusammenhänge erläutern (2.8).

Die Einführung der drei  $C^*$ -Tensornormen  $\|\cdot\|_{\max}$ ,  $\max\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|_{\max}$  im dritten Kapitel orientiert sich an der Konstruktion der Grothendieckschen Varianten der Tensornorm  $\pi$ . Diese Normen stehen, soweit sie unter operatorentheoretischen Gesichtspunkten thematisiert werden, im Zusammenhang mit dem funktionalanalytischen Imperativ fortzusetzen. In der Tat: Analog zur Grothendieckschen Theorie charakterisiert  $\|\cdot\|_{\max}$  fortsetzbare Morphismen (3.8). Andererseits muß im Kontext der Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren die naheliegende Frage untersucht werden, wann  $A \otimes_{\|\cdot\|_{\max}} B = A \otimes_{\|\cdot\|_{\max}} B$  bzw.  $A \otimes_{\|\cdot\|_{\max}} B = A \otimes_{\|\cdot\|_{\max}} B$  ( $A, B$   $C^*$ -Algebren). Hier ergeben sich Beziehungen zu Resultaten von E.G.Effros C.Lance: Die von den genannten Autoren formulierte "extension property" der maximalen  $C^*$ -Tensornorm ([15]; [18]) findet ihren systematischen Ausdruck im (Grothendieckschen) Konzept der "injektiven ( $C^*$ -)Tensornormen" (vgl. 3.1).  $\|\cdot\|_{\max}$  charakterisiert in diesem Zusammenhang sog. WEP-Algebren (weak expectation property) bzw. injektive  $W^*$ -Algebren (3.5; 3.5, Kor.);  $\max\|\cdot\|$  charakterisiert nukleare  $C^*$ -Algebren (3.7).

Die letzten beiden Abschnitte dieser Arbeit schließlich versuchen, Tensorprodukt-Methoden im Rahmen der Operatoren  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$  bzw.  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  zur Anwendung zu bringen. Im Vordergrund steht dabei die Frage nach der operatorentheoretischen Interpretation der Ordnung von  $C^*$ -Algebren bzw. Dualen von  $C^*$ -Algebren. Ein zweiter Schwerpunkt ist dabei, die dort auftauchenden Normen von Operatoren mit den klassischen Größen der Operatorentheorie in Beziehung zu setzen.

Zunächst werden Operatoren  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$  im Rahmen des Konzeptes der  $\alpha$ -nuklearen Operatoren untersucht. Zugrunde liegt dabei die Abbildung  $\nu_{\min}^t$  ( $t := 1/n \operatorname{tr}$ ,  $\operatorname{tr}$  die Spur auf  $M_n$ ). Zu jedem Operator  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$  gibt es genau ein  $z \in {}_K M_n \otimes_{\min} A$  mit  $T = T_z := \nu_{\min}^t(z)$ . Im Zentrum der weiteren Untersuchung stehen die Eigenschaften des vollständig positiven Operators  $|T_z| := T_{|z|}$ . Das Ziel dabei ist, "Betragsungleichungen" zu beweisen. Analog zur Grothendieckschen Theorie wird die min-nukleare Norm des Operators  $T_z$  definiert (4.1). Da  $z$  und  $|z|$  multiplikativ durch eine partielle Isometrie miteinander verknüpft sind, gelingt es, im Rahmen der Stinespring-Zerlegung den Operator  $T_z$  auf dem Stinespring-Hilbert-Raum von  $|T_z|$  zu beschreiben. (4.3). Daraus ergibt sich

$$T_z^{(m)}(x)^* T_z^{(m)}(x) \leq \|T_z\|_{\min} |T_z|^{(m)}(x^* x)$$

$\forall x \in M_m(M_n), \forall m \in \mathbb{N}$ . Eine zweite Ungleichung, deren Vorbild ebenfalls in der skalaren Theorie zu suchen ist, kann mit ähnlichen Methoden bewiesen werden:

$$| |T_y + T_z|^{(m)}(x) |^2 \leq (\|T_y\|_{\min}^{(m)} + \|T_z\|_{\min}^{(m)}) (|T_y|^{(m)}(x^*x) + |T_z|^{(m)}(x^*x))$$

$\forall x \in M_m(M_n), \forall m \in \mathbb{N}$  (4.6). - Anknüpfend an die Arbeit von R.I.Loeb1 ([21]), ergibt sich für  $n=2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ):

$$\| |T_z| \| \leq V(T^{(n)}),$$

wobei  $V(T^{(n)})$  die totale Variation von  $T^{(n)}$  bezeichne (4.9).

Zu jedem Operator  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  gibt es genau einen vollständig positiven Operator  $|T| \in \mathcal{L}(A, M_n)$  mit  $\phi^t(|T|) = |\phi^t(T)|$ . Ist  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  selbstadjungiert, so gibt es eindeutig bestimmte vollständig positive Operatoren  $T^+, T^- \in \mathcal{L}(A, M_n)$  mit:  $T = T^+ - T^-$  und  $\phi^t(T^+) = \phi^t(T)^+$ ,  $\phi^t(T^-) = \phi^t(T)^-$  (5.3). Analog zur Grothendieckschen Theorie wird die min-Norm eines Operators  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  definiert; es ist  $\|T\|_\infty \leq \min(T)$  (5.4; 5.5, Kor.2) (dabei sei  $\|T\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|T^{(m)}\|$ ). Da  $\phi^t(T)$  und  $|\phi^t(T)|$  durch eine partielle Isometrie miteinander verkoppelt sind, gelingt es,  $T$  im Rahmen des Darstellungssatzes 2.7 auf dem Hilbert-Raum  $\overline{H_{|\phi^t(T)|}}$  zu beschreiben (5.5). Daraus ergibt sich

$$T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x) \leq \min(T) |T|^{(m)}(x^*x)$$

$\forall x \in M_m(A), \forall m \in \mathbb{N}$ . Mit ähnlichen Methoden wird (5.7) gezeigt:

$$||T+S|^{(m)}(x)|^2 \leq (\min(T)+\min(S))(|T|^{(m)}(x^*x)+|S|^{(m)}(x^*x))$$

$\forall x \in M_m(A), \forall m \in \mathbb{N}$ . Die Normen  $\min(\cdot)$  und  $\|\cdot\|_\infty$  sind äquivalent auf  $\mathcal{L}(A, M_n)$  (5.5, Kor.3). Aus  $T_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} T$  ( $T_m, T \in \mathcal{L}(A, M_n), m \in \mathbb{N}$ ) folgt  $|T_m| \xrightarrow{\|\cdot\|} |T|$  (5.8). Ist  $T$  selbstadjungiert, so heißt  $T = T^+ - T^-$  die Jordan-Zerlegung von  $T$ . Diese ist durch die Forderung  $\min(T) = \min(T^+) + \min(T^-)$  eindeutig charakterisiert (5.10). Schließlich wird in 5.11 ein Radon-Nikodym-Satz für vollständig positive Operatoren aus  $\mathcal{L}(A, M_n)$  bewiesen.

Der Beweis von 1.2 entstammt [15]; der erste Teil des Beweises von 1.3 geht zurück auf [25]; die Idee für den zweiten Teil entstammt [33]. 1.5 wurde nach [32] bewiesen. Die Beweise von 3.5 und 3.7 orientieren sich an [15].

Einige Bemerkungen zur Terminologie seien hier angeschlossen:

0.1 Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra; dann möge  $A$  im folgenden stets eine Einheit  $1$  besitzen.  $A_s$  bezeichne die Teilmenge der selbstadjungierten Elemente und  $A_+$  die Teilmenge der positiven Elemente von  $A$ .  $A_+$  ist ein ab-

geschlossener, echter und erzeugender Kegel;

$A_+ = \{x^*x : x \in A\}$ .  $A$  heißt eine  $W^*$ -Algebra, falls es einen Banach-Raum  $A_*$  gibt, so daß  $A$  als Banach-Raum isomorph zu  $(A_*)^*$  ist.  $A_*$  heißt dann der Prädual von  $A$  und seine Elemente die normalen Linearformen auf  $A$ .  ${}_kA$  bezeichne diejenige  $C^*$ -Algebra, die aus  $A$  durch  $k$ -Einschränkung des Skalarbereiches  $\mathbb{C}$  entsteht ( $k(\lambda) = \bar{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ );  ${}_kA$  ist antiisomorph zu  $A$ . - Darstellungen von  $C^*$ -Algebren seien stets nicht degeneriert.

0.2 Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $x \in A_s$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente  $x^+, x^- \in A_+$  mit  $x = x^+ - x^-$ ,  $x^+x^- = 0$  ([25]). Für  $x \in A$  sei  $|x| := (x^*x)^{1/2}$ .  $|x|$  heißt der Absolutbetrag von  $x$ . Ist  $A$  eine  $W^*$ -Algebra und  $x \in A$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie  $u \in A$  mit  $x = u|x|$  und  $u^*u = s(|x|)$ ,  $uu^* = s(|x^*|)$  (dabei ist  $s(|x|)$  bzw.  $s(|x^*|)$  die Trägerprojektion von  $|x|$  bzw.  $|x^*|$ ).  $u$  heißt die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $x$ .

0.3 Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\varphi \in A^*$ . Dann sei  $\varphi^*(x) := \overline{\varphi(x^*)} \quad \forall x \in A$ .  $\varphi$  heißt selbstadjungiert, falls  $\varphi^* = \varphi$ .  $\varphi$  heißt positiv, wenn  $\varphi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ .  $\varphi$  heißt ein Zustand, wenn  $\varphi(1) = 1$ . Die Menge aller Zustände von  $A$  wird mit  $\mathcal{P}(A)$  bezeichnet.  $\mathcal{P}(A)$  ist  $\sigma(A^*, A)$ -kompakt ([25]). Für  $a \in A$  bezeichne  $L_a\varphi$  bzw.  $R_a\varphi$  die Linearform  $x \mapsto \varphi(ax)$  bzw.  $x \mapsto \varphi(xa) \quad (x \in A)$ . Sei  $\varphi \in A^*$  positiv; dann bezeichne  $\{\pi_\varphi, H_\varphi\}$  die Darstellung

der GNS-Konstruktion bzgl.  $\varphi$  von  $A$ ; der zyklische Vektor dieser Darstellung werde mit  $\xi_\varphi$  bezeichnet (vgl. [25]). Ist  $A$  eine  $W^*$ -Algebra und  $\varphi \in A_*$  selbstadjungiert, so gibt es eindeutig bestimmte Elemente  $\varphi^+, \varphi^- \in A_*$  mit  $\varphi^+, \varphi^- \geq 0$ ,  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  und  $\|\varphi\| = \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\|$  ([25]). Die Zerlegung  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  heißt die Jordan-Zerlegung von  $\varphi$ . Zu  $\varphi \in A_*$  gibt es eine eindeutig bestimmte positive Linearform  $|\varphi| \in A_*$  mit  $\|\varphi\| = \| |\varphi| \|$  und  $|\varphi(x)|^2 \leq \|\varphi\| |\varphi|(x^*x) \quad \forall x \in A$ . Darüberhinaus gibt es eine partielle Isometrie  $u \in A$  mit  $\varphi = I_u |\varphi|$  und  $|\varphi| = I_{u^*} \varphi$  ([24]). Unter der Forderung  $uu^* = s(|\varphi|)$  ( $s(|\varphi|)$  die Trägerprojektion von  $|\varphi|$ ) ist  $u$  eindeutig bestimmt ([14]).  $u$  heißt die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $\varphi$ . Eine positive Linearform  $\varphi$  auf  $A$  heißt treu, wenn  $\varphi(x^*x) > 0 \quad \forall 0 \neq x \in A$ .

0.4 Sei  $E$  ein lokalkonvexer, separierter, reeller Vektorraum und  $K \subseteq E$  konvex und kompakt. Eine konvexe Teilmenge  $F$  von  $K$  heißt eine Seite von  $K$ , falls  $\forall x, y \in K, \forall 0 < \lambda < 1$  mit  $\lambda x + (1-\lambda)y \in F: x, y \in F$ . Sei  $F$  eine Seite von  $K$  und  $F'$  die Vereinigung aller Seiten  $G$  von  $K$  mit  $G \cap F = \emptyset$ . Ist  $F'$  eine Seite und besitzt jedes Element  $x \in K$  eine eindeutige Darstellung  $x = \lambda y + (1-\lambda)y'$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1, y \in F, y' \in F'$ , so heißt  $F$  eine Splitseite von  $K$ .

0.5 Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann bezeichne  $M_n(A)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) die Menge aller  $n \times n$ -Matrizen  $[a_{ij}]$  mit  $a_{ij} \in A$ .  $M_n(A)$  trägt in natürlicher Weise die Struktur einer involutiven Algebra. Ist  $A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $\mathcal{L}(H)$  ( $H$  ein

Hilbert-Raum), so kann  $M_n(A)$  in natürlicher Weise als  $C^*$ -Unteralgebra von  $\mathcal{L}(\bigoplus_{i=1}^n H_i)$  mit  $H_i = H$  ( $1 \leq i \leq n$ ) realisiert werden. Ein Element  $a \in M_n(A)$  ist genau dann positiv, wenn  $a$  als endliche Summe von Matrizen der Form  $[a_i^* a_i]$  ( $a_i \in A$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) geschrieben werden kann. Es sei  $M_n(A^*)$  die Menge aller  $n \times n$ -Matrizen  $[e_{ij}]$  mit  $e_{ij} \in A^*$ .  $M_n(A^*)$  kann mit  $M_n(A)^*$  durch

$$\langle [e_{ij}], [a_{ij}] \rangle = \sum_j e_{ij}(a_{ij}) \quad ([a_{ij}] \in M_n(A))$$

identifiziert werden. Ebenso identifiziere man  $M_n(A^*)^*$  mit  $M_n(A^{**})$  (vgl. [15]).

O.6 Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $T \in \mathcal{L}(A, B)$ .  $T$  heißt selbstadjungiert, falls  $T(x^*) = T(x)^* \quad \forall x \in A$ . - Sei  $E$  eine  $C^*$ -Algebra oder Dualraum einer  $C^*$ -Algebra und  $E_0$  ein Teilraum von  $E$ .  $M_n(E_0)$  bezeichne den Raum aller  $n \times n$ -Matrizen  $[c_{ij}]$  mit  $c_{ij} \in E_0$ .  $M_n(E_0)$  trage die relative Ordnungsstruktur. Ist  $F$  ein weiterer Raum dieses Typs und  $T: E_0 \longrightarrow F$  linear, so definiert  $T$  in kanonischer Weise einen linearen Operator  $T^{(n)}: M_n(E_0) \longrightarrow M_n(F)$  ( $T^{(n)}([c_{ij}]) := [T(c_{ij})] \quad \forall [c_{ij}] \in M_n(E_0)$ ).  $T$  heißt vollständig positiv, wenn  $T^{(n)}$  positiv ist  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Für vollständig positive Operatoren  $T: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$

( $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $H$  ein Hilbert-Raum) gilt der folgende berühmte Darstellungssatz von W.F.Stinespring: Es gibt eine Darstellung  $\{\pi, K\}$  von  $A$  und einen Operator  $V \in \mathcal{L}(H, K)$  mit  $T(x) = V^* \pi(x) V \quad \forall x \in A$ . Unter gewissen weiteren Forderungen kann das Tripel  $\{\pi, K, V\}$  "bis auf

Äquivalenz" eindeutig bestimmt werden. Diese Tatsache spielt im folgenden eine untergeordnete Rolle, ermöglicht aber, von dem Tripel  $\{\pi, K, V\}$  der Stinespring-Zerlegung von  $T$  zu sprechen. Der Beweis dieses Zusammenhangs sei hier in den wichtigsten Punkten skizziert: Betrachte  $A \otimes H$ ; es sei

$$\langle \sum_i x_i \otimes \xi_i \mid \sum_j y_j \otimes \eta_j \rangle := (\sum_{ij} T(y_j^* x_i) \xi_i \mid \eta_j)$$

( $x_i, y_j \in A$ ,  $\xi_i, \eta_j \in H$ ) und  $\mathcal{W} := \{ \zeta \in A \otimes H : \langle \zeta \mid \zeta \rangle = 0 \}$ .  $K := (A \otimes H / \mathcal{W})^{\sim}$  ist ein Hilbert-Raum. Für  $x \in A$  sei

$$\pi^0(x) (\sum_i x_i \otimes \xi_i + \mathcal{W}) := \sum_i x x_i \otimes \xi_i + \mathcal{W}$$

und  $\pi$  die von  $\pi^0$  auf  $K$  induzierte Darstellung von  $A$ . Mit  $V(\xi) := 1 \otimes \xi + \mathcal{W}$  ( $\xi \in H$ ) gilt dann  $T(x) = V^* \pi(x) V$   $\forall x \in A$ . - Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(A, B)$  ( $A, B$   $C^*$ -Algebren) heißt vollständig beschränkt, falls  $\|T\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^{(n)}\| < \infty$ .  
 O.7 Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren.  $A \otimes B$  trägt in natürlicher Weise die Struktur einer involutiven Algebra.  $(A \otimes B)^d$  bezeichne den algebraischen Dualraum von  $A \otimes B$ . Eine Linearform  $\phi \in (A \otimes B)^d$  heißt positiv, falls  $\phi(x^* x) \geq 0$   $\forall x \in A \otimes B$ . Eine Norm  $\|\cdot\|_{\alpha}$  auf  $A \otimes B$  heißt Kreuznorm, falls  $\|x \otimes y\|_{\alpha} = \|x\|_{\alpha} \|y\|$   $\forall x \in A, \forall y \in B$ .  $\|\cdot\|_{\alpha}$  heißt  $C^*$ -Norm, falls  $\|x^* x\|_{\alpha} = \|x\|_{\alpha}^2$  und  $\|xy\|_{\alpha} \leq \|x\|_{\alpha} \|y\|_{\alpha}$   $\forall x, y \in A \otimes B$ . Die zu  $\|\cdot\|_{\alpha}$  duale Norm auf  $A^* \otimes B^*$  wird mit  $\|\cdot\|_{\alpha}^*$  bezeichnet.

Mein Dank gilt allen Teilnehmern der Arbeitsgemeinschaften " $C^*$ -Algebren" und "Funktionalanalysis" für wertvolle Diskussionen und viele anregende Fragen. Besonders dankbar bin ich Herrn Prof.Dr.U.Schlotterbeck für sein großes persönliches Engagement.

## 1. $C^*$ -TENSORNORMEN

Der erste Abschnitt dieser Arbeit konzentriert sich auf die Einführung und allgemeine Entwicklung des Begriffs einer  $C^*$ -Tensornorm. Das Ziel ist, eine systematische Sprechweise über  $C^*$ -Tensornormen auf abstrakter Basis zu gewinnen. - Die Schwerpunkte dieses Kapitels liegen einmal bei der vorwiegend beweistechnisch motivierten Charakterisierung von  $C^*$ -Tensornormen in 1.4:  $C^*$ -Normen auf  $A \otimes B$  ( $A, B$   $C^*$ -Algebren) sind durch trennende, invariante Teilmengen des maximalen Zustandsraumes bestimmt. Dagegen arbeitet 1.6 den geometrischen Aspekt des Normenproblems für Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren heraus: Die Zustandsräume von  $C^*$ -Normen auf  $A \otimes B$  sind genau die trennenden,  $\sigma$ -abgeschlossenen Splitseiten des maximalen Zustandsraumes.

Die minimale  $C^*$ -Tensornorm kann hier, was ihre fundamentalen Eigenschaften angeht, nur skizzenhaft diskutiert werden.

DEFINITION:(1.1) Eine Vorschrift  $\alpha$  heißt  $C^*$ -Tensornorm, wenn sie für jedes Paar  $(A, B)$  von  $C^*$ -Algebren

eine Norm  $\|\cdot\|_\alpha$  auf  $A \otimes B$  definiert, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(\otimes_1): \|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \quad \forall x, y \in A \otimes B.$$

$$(\otimes_2): \|x^*x\|_\alpha = \|x\|_\alpha^2 \quad \forall x \in A \otimes B.$$

$(A \otimes B, \|\cdot\|_\alpha)$  wird mit  $A \otimes_\alpha B$  bezeichnet; die Kompletierung  $A \tilde{\otimes}_\alpha B$  von  $A \otimes_\alpha B$  heißt das  $C^*$ -Tensorprodukt bzgl.  $\alpha$  von  $A$  und  $B$ .

Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und

$$S(A \otimes B) := \{ \phi \in (A \otimes B)^d : \phi \geq 0 \text{ und } \phi(1 \otimes 1) = 1 \}.$$

Die folgenden Überlegungen werden zeigen, daß  $S(A \otimes B)$  als Zustandsraum einer involutiven Banach-Algebra realisiert werden kann. - Zunächst setze für  $x \in A \otimes B$ :

$$\|x\|_\pi := \inf \left\{ \sum_i \|x_i\| \|y_i\| : x = \sum_i x_i \otimes y_i \right\}.$$

$\|\cdot\|_\pi$  ist die größte Kreuznorm auf  $A \otimes B$ .  $A \tilde{\otimes}_\pi B$  ist eine involutive Banach-Algebra ([33]);  $\pi$  ist jedoch keine  $C^*$ -Tensornorm.

LEMMA: (1.2) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren. Identifiziert man den reellen Vektorraum  $A_S \otimes B_S$  mit einem reellen Teilraum von  $A \otimes B$ , so gilt:

a)  $A_S \otimes B_S = (A \otimes B)_S$ .

b) Zu jedem  $x \in (A \otimes B)_S$  gibt es ein  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq \lambda(1 \otimes 1)$ .

Beweis: a) Es ist klar, daß  $A_S \otimes B_S \subseteq (A \otimes B)_S$ . - Sei nun  $x := \sum_j x_j \otimes y_j \in (A \otimes B)_S$ . Dann gilt:

$$x = 1/2(x+x^*) = 1/4 \sum_j (x_j+x_j^*) \otimes (y_j+y_j^*) - i(x_j-x_j^*) \otimes i(y_j-y_j^*).$$

Also ist  $x \in A_S \otimes B_S$ .

b) Sei  $x \in A_+$ ,  $y \in B_+$ . Dann ist  $x \otimes y \leq \|x\|(1 \otimes y) \leq \|x\|\|y\|(1 \otimes 1)$ . - Für  $x \in A_S$ ,  $y \in B_S$  ist  $x = x^+ - x^-$ ,  $y = y^+ - y^-$  mit  $x^+, x^- \in A_+$ ,  $y^+, y^- \in B_+$ ,  $\|x^+\|, \|x^-\| \leq \|x\|$  und  $\|y^+\|, \|y^-\| \leq \|y\|$ . Damit gilt:  $x \otimes y = x^+ - x^- \otimes y^+ - y^- \leq x^+ \otimes y^+ + x^- \otimes y^- \leq 2\|x\|\|y\|(1 \otimes 1)$ . Für  $x := \sum_i x_i \otimes y_i \in (A \otimes B)_S = A_S \otimes B_S$  ist deshalb

$$x \leq 2 \sum_i \|x_i\| \|y_i\| (1 \otimes 1). \quad \blacksquare$$

Ist nun  $\phi \in S(A \otimes B)$ , so folgt  $\forall x \in A, \forall y \in B$ :

$$|\phi(x \otimes y)| \leq 4 \|x\| \|y\| \phi(1 \otimes 1)$$

$$= 4 \|x\| \|y\|;$$

$\phi$  ist also stetig auf  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  und kann deshalb (in eindeutiger Weise) zu einem Zustand  $\hat{\phi}$  von  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  fortgesetzt werden. Ist umgekehrt  $\Psi$  ein Zustand von  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ , so ist natürlich  $\Psi|_{A \otimes B} \in S(A \otimes B)$ . M.a.W.:  $S(A \otimes B)$  kann mit dem Zustandsraum  $\mathcal{J}_{\mathbb{K}}(A, B)$  von  $A \otimes_{\mathbb{K}} B$  identifiziert werden.

Eine Teilmenge  $\Gamma$  von  $S(A \otimes B)$  heißt trennend, wenn es zu jedem  $0 \neq x \in A \otimes B$  ein  $\phi \in \Gamma$  gibt mit  $\phi(x^*x) > 0$ . (Ist  $C$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\Gamma_C \subseteq \mathcal{J}(C)$ , so heißt  $\Gamma_C$  trennend, wenn es zu jedem  $0 \neq c \in C$  ein  $\psi \in \Gamma_C$  gibt mit  $\psi(c^*c) > 0$ .)

PROPOSITION: (1.3) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\Gamma_A \subseteq \mathcal{J}(A)$ ,  $\Gamma_B \subseteq \mathcal{J}(B)$  trennend; dann ist  $\Gamma_A \otimes \Gamma_B := \{\psi \otimes \psi : \psi \in \Gamma_A, \psi \in \Gamma_B\}$  eine trennende Teilmenge von  $S(A \otimes B)$ .

Beweis: 1.  $\Gamma_A \otimes \Gamma_B \subseteq S(A \otimes B)$ .

Zunächst ist  $\forall \psi \in \Gamma_A, \forall \psi \in \Gamma_B: \psi \otimes \psi(1 \otimes 1) = \psi(1)\psi(1) = 1$ . -

Sei  $x := \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes B$ . Dann ist für  $\psi \otimes \psi \in \Gamma_A \otimes \Gamma_B$ :

$$\psi \otimes \psi(x^*x) = \psi \otimes \psi\left(\sum_{ij} x_i^* x_j \otimes y_i^* y_j\right) = \sum_{ij} \psi(x_i^* x_j) \psi(y_i^* y_j).$$

Weiter ist  $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ :  $\sum_{i,j} \psi(y_i^* y_j) \bar{\lambda}_i \lambda_j = \psi((\sum_i \lambda_i y_i)^* (\sum_i \lambda_i y_i)) \geq 0$ . Also ist die Matrix  $[\psi(y_i^* y_j)] \in M_n$  positiv und deshalb eine positive Linearkombination von Matrizen der Form  $[\bar{\mu}_i \mu_j] \in M_n$ . Folglich ist  $\psi \otimes \psi \geq 0$  und  $\Gamma_A \otimes \Gamma_B \subseteq S(A \otimes B)$ .

2. Sei  $0 \neq x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in A \otimes B$ . Dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß  $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ ,  $\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$  linear unabhängige Teilmengen von  $A$  bzw.  $B$  sind. Es gibt ein  $\psi \in \Gamma_B$  mit  $\psi(y_1^* y_1) > 0$ . Die Matrix  $[\psi(y_i^* y_j)] \in M_n$  ist positiv; folglich ist  $[\psi(y_i^* y_j)] = \sum_{p=1}^k [\bar{\lambda}_i^{(p)} \lambda_j^{(p)}]$  ( $\lambda_i^{(p)} \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq p \leq k$ ). Da  $\psi(y_1^* y_1) > 0$ , gibt es ein  $1 \leq p_0 \leq k$  mit  $\lambda_1^{(p_0)} \neq 0$ . Sei o.B.d.A.  $p_0 = 1$ . Setze  $A \ni x_1 := \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)} x_i$ ; dann ist  $x_1 \neq 0$ . Es gibt also ein  $\psi \in \Gamma_A$  mit  $\psi(x_1^* x_1) > 0$ . Es ist damit

$$\begin{aligned} \psi \otimes \psi(x^* x) &= \sum_{i,j=1}^n \psi(x_i^* x_j) \psi(y_i^* y_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{p=1}^k \psi(x_i^* x_j) \bar{\lambda}_i^{(p)} \lambda_j^{(p)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \psi(x_i^* x_j) \bar{\lambda}_i^{(1)} \lambda_j^{(1)} + \sum_{p=2}^k \sum_{i,j=1}^n \psi(x_i^* x_j) \bar{\lambda}_i^{(p)} \lambda_j^{(p)} \\ &= \psi(x_1^* x_1) + \sum_{p=2}^k \psi((\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(p)} x_i)^* (\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(p)} x_i)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Sei  $\Gamma \subseteq S(A \otimes B)$ ,  $\phi \in \Gamma$  und  $y \in A \otimes B$ ; dann ist  $L_y^* R_y \phi \geq 0$ .

$\Gamma$  heißt invariant, wenn für jedes  $\phi \in \Gamma$  und für jedes  $y \in A \otimes B$  gilt:  $\phi(y^*y)^{-1} L_{y^*} R_y \phi \in \Gamma$  ( $\phi(y^*y) \neq 0$ ).  $\Gamma$  ist genau dann invariant, wenn es zu jedem  $\phi \in \Gamma$  und zu jedem  $y \in A \otimes B$  ein  $\psi_{\phi,y} \in \Gamma$  gibt mit  $\phi(y^*xy) = \phi(y^*y) \psi_{\phi,y}(x)$   $\forall x \in A \otimes B$ .

THEOREM:(1.4) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\Gamma$  eine trennende, invariante Teilmenge von  $S(A \otimes B)$ . Dann ist durch

$$\|x\|_{\Gamma} := \sup_{\phi \in \Gamma} \phi(x^*x)^{1/2} \quad (x \in A \otimes B)$$

eine  $C^*$ -Norm  $\|\cdot\|_{\Gamma}$  auf  $A \otimes B$  gegeben. Der Zustandsraum  $\mathcal{S}_{\Gamma}(A, B)$  von  $A \tilde{\otimes}_{\Gamma} B$  kann mit dem  $\sigma((A \otimes B)^d, A \otimes B)$ -Abschluß von  $\text{co}\Gamma$  in  $S(A \otimes B)$  identifiziert werden.

Beweis: Zunächst ist  $\forall x \in A \otimes B \quad \|x\|_{\Gamma} < \infty$ , da  $\Gamma \subseteq S(A \otimes B) = \mathcal{S}_{\Gamma}(A, B)$ . - Es ist klar, daß  $\|\lambda x\|_{\Gamma} = |\lambda| \|x\|_{\Gamma} \quad \forall x \in A \otimes B, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ . - Seien  $x, y \in A \otimes B$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\Gamma} &= \sup_{\phi \in \Gamma} \phi((x+y)^*(x+y))^{1/2} \\ &= \sup_{\phi \in \Gamma} \phi(x^*x + x^*y + y^*x + y^*y)^{1/2} \\ &= \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x) + \overline{\phi(y^*x)} + \phi(y^*x) + \phi(y^*y))^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x) + 2\operatorname{Re} \phi(y^*x) + \phi(y^*y))^{1/2} \\
 &\leq \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x) + 2|\phi(y^*x)| + \phi(y^*y))^{1/2} \\
 &\leq \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x) + 2\phi(x^*x)^{1/2}\phi(y^*y)^{1/2} + \phi(y^*y))^{1/2} \\
 &= \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x)^{1/2} + \phi(y^*y)^{1/2})^2 \\
 &\leq \|x\|_{\Gamma} + \|y\|_{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

da  $\Gamma$  trennend ist, ist  $\|\cdot\|_{\Gamma}$  also eine Norm auf  $A \otimes B$ . -  
Weiter ist für  $x, y \in A \otimes B$ :

$$\begin{aligned}
 \|xy\|_{\Gamma} &= \sup_{\phi \in \Gamma} \phi(y^*x^*xy)^{1/2} \\
 &= \sup_{\phi \in \Gamma} \phi(y^*y)^{1/2} \psi_{\phi, y}(x^*x)^{1/2} \\
 &\leq \|x\|_{\Gamma} \|y\|_{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{\Gamma}^2 &= \sup_{\phi \in \Gamma} \phi(x^*x) = \sup_{\phi \in \Gamma} (\phi(x^*x)^2)^{1/2} \\
 &\leq \sup_{\phi \in \Gamma} \phi((x^*x)^2)^{1/2} = \|x^*x\|_{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_{\Gamma}$  ist also eine  $C^*$ -Norm auf  $A \otimes B$ . - Nach [15]: 2.4  
folgt  $\mathcal{V}_{\Gamma}(A, B) = \overline{\operatorname{co}}^{\sigma} \Gamma$ . ■

Sei  $\max(A, B) := S(A \otimes B)$ ;  $\max(A, B)$  ist trennend und invariant; nach 1.4 ist  $\max$  eine  $C^*$ -Tensornorm. Es ist klar, daß  $\max$  die größte  $C^*$ -Tensornorm ist und  $\mathcal{J}_{\max}(A, B)$  mit  $\max(A, B)$  identifiziert werden kann. - Die folgende universelle Eigenschaft der  $C^*$ -Tensornorm  $\max$  bietet den Ansatzpunkt für eine interessante geometrische Charakterisierung der Zustandsräume von  $C^*$ -Tensornormen.

PROPOSITION: (1.5) Seien  $A, B, C$   $C^*$ -Algebren und  $\psi_1: A \longrightarrow C$ ,  $\psi_2: B \longrightarrow C$  Homomorphismen mit kommutierenden Bildern. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\psi$  von  $A \underset{\max}{\otimes} B$  in  $C$  mit  $\psi(x \otimes y) = \psi_1(x) \psi_2(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B$ .  $\psi(A \underset{\max}{\otimes} B)$  ist die von  $\psi_1(A)$  und  $\psi_2(B)$  erzeugte  $C^*$ -Unteralgebra von  $C$ .

Beweis: Sei  $x = \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes B$ . Dann setze  $\psi^0(x) := \sum_i \psi_1(x_i) \psi_2(y_i)$ .  $\psi^0$  ist ein Homomorphismus der involutiven Algebra  $A \otimes B$  in  $C$ . - Für jedes Element  $e \in \mathcal{P}(C)$  ist  $e_{\psi^0} \in S(A \otimes B)$ , wobei  $e_{\psi^0}(x) = \langle \psi^0(x), e \rangle \quad \forall x \in A \otimes B$ . Also ist:

$$\begin{aligned} \|\psi^0(x)\| &= \sup_{e \in \mathcal{P}(C)} \langle \psi^0(x)^* \psi^0(x), e \rangle^{1/2} \\ &= \sup_{e \in \mathcal{P}(C)} \langle \psi^0(x^* x), e \rangle^{1/2} \\ &= \sup_{e \in \mathcal{P}(C)} e_{\psi^0}(x^* x)^{1/2} \\ &\leq \|x\|_{\max}. \end{aligned}$$

$\psi^0$  kann also eindeutig fortgesetzt werden zu einem Homomorphismus  $\psi: A \tilde{\otimes}_{\max} B \longrightarrow C$  mit  $\psi(x \otimes y) = \psi_1(x) \psi_2(y)$   $\forall x \in A, \forall y \in B$ . - Auf den Beweis des zweiten, leicht zu verifizierenden Teils der Behauptung kann hier verzichtet werden. ■

Ist nun  $\beta$  eine  $C^*$ -Tensornorm, so gibt es Homomorphismen  $\psi_1: A \longrightarrow A \tilde{\otimes}_{\beta} B, \psi_2: B \longrightarrow A \tilde{\otimes}_{\beta} B$  ( $\psi_1(x) := x \otimes 1, \psi_2(y) := 1 \otimes y$  ( $x \in A, y \in B$ )). Nach 1.5 existiert ein Homomorphismus  $\psi$  von  $A \tilde{\otimes}_{\max} B$  in  $A \tilde{\otimes}_{\beta} B$  mit  $\psi(x \otimes y) = \psi_1(x) \psi_2(y) = x \otimes y$   $\forall x \in A, \forall y \in B$ .  $\psi$  ist surjektiv.  $A \tilde{\otimes}_{\beta} B$  ist also in natürlicher Weise ein Quotient von  $A \tilde{\otimes}_{\max} B$ . - Damit kann folgender Zusammenhang formuliert werden:

PROPOSITION: (1.6) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\Gamma \subseteq S(A \otimes B)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a)  $\Gamma = \mathcal{J}_{\beta}(A, B)$  für eine  $C^*$ -Norm  $\|\cdot\|_{\beta}$  auf  $A \otimes B$ .

b)  $\Gamma$  ist eine  $\sigma$ -abgeschlossene, trennende Splitseite von  $S(A \otimes B)$  ( $\sigma := \sigma((A \otimes B)^d, A \otimes B)$ ).

Beweis: a)  $\implies$  b): Ist  $\|\cdot\|_{\beta}$  eine  $C^*$ -Norm auf  $A \otimes B$ , so ist

$A \tilde{\otimes}_B B$  ein Quotient von  $A \tilde{\otimes}_{\max} B$ .  $\mathcal{Y}_B(A, B)$  kann also mit einer  $\sigma$ -abgeschlossenen Splitseite von  $S(A \otimes B)$  identifiziert werden ([32]: III, 6.27).

b)  $\implies$  a): Sei  $\Gamma \subseteq S(A \otimes B)$  eine  $\sigma$ -abgeschlossene Splitseite; dann ist  $\Gamma$  invariant ([3]: 7.1). Sei  $P(\Gamma)$  die Teilmenge der Extrempunkte von  $\Gamma$ ;  $P(\Gamma)$  ist trennend und  $\forall \phi \in P(\Gamma)$  gilt:  $\phi$  ist extremal in  $S(A \otimes B)$ . Sei nun  $\phi \in P(\Gamma)$  und  $y \in A \otimes B$ ,  $\phi(y^*y) =: \sigma \neq 0$ . Dann ist  $\tilde{\phi} := \sigma^{-1} L_y^* R_y \phi \in \{L_u^* R_u \phi : u \in A \tilde{\otimes}_{\max} B, u \text{ unitär}\}$  ([12]: 2.4.8; 2.8.6; 2.12.19).  $\Gamma$  ist invariant, also ist  $\tilde{\phi} \in \Gamma$  und sogar  $\tilde{\phi} \in P(\Gamma)$ , da  $\phi \in P(\Gamma)$ . Nach 1.4 folgt nun die Behauptung. ■

Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren. Wie man leicht verifiziert, ist

$$\min(A, B) := A^* \otimes B^* \cap S(A \otimes B)$$

nach 1.3 trennend und nach [25]: 1.7.8 invariant.  $\min$  ist also eine  $C^*$ -Tensornorm (1.4). Es ist klar, daß  $\min \leq \max \leq \pi$ . Der wichtige Zusammenhang  $\varepsilon \leq \min$  wurde von S. Sakai bewiesen ([25]: 1.22.2). Die von M. Takesaki bewiesene fundamentale Tatsache, daß  $\min$  die kleinste  $C^*$ -Tensornorm ist, läßt nun den Schluß zu, daß jede  $C^*$ -Tensornorm eine Kreuznorm ist, Insbesondere sind

$\min^*$  und  $\max^*$  Kreuznormen; es ist sogar  $A^* \tilde{\otimes}_{\max}^* B^* = A^* \tilde{\otimes}_{\max}^* B^*$  ([32]: IV, 4.10).  $A \tilde{\otimes}_{\max} B \in \mathcal{L}(H \tilde{\otimes} K)$  ( $H, K$  Hilbert-Räume), falls  $A \in \mathcal{L}(H)$ ,  $B \in \mathcal{L}(K)$  ([15]). - Beispiele nuklearer  $C^*$ -Algebren sind  $C(X)$  ( $X$  kompakt),  $M_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $C^*$ -Algebren vom Typ I ([31]; [32]); eine  $W^*$ -Algebra  $M$  ist genau dann nuklear, wenn  $M \cong \bigoplus_{i=1}^k (Z_i \otimes M_{n_i})$  ( $Z_i$  eine kommutative  $W^*$ -Algebra,  $n_i \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq i \leq k$ )) ([38]). Wie M. Takesaki entdeckte, ist  $C_1^*(F_2)$  nicht nuklear ([31]). - Diese wenigen Bemerkungen können die hier angesprochenen komplizierten Zusammenhänge nur skizzenhaft beleuchten.

## 2. TENSORPRODUKTE VON $C^*$ -ALGEBREN UND VOLLSTÄNDIG POSITIVE OPERATOREN

Wie schon in der Einleitung angedeutet, soll nun versucht werden, Tensorprodukte von  $C^*$ -Algebren in die operatorentheoretische Problematik der  $C^*$ -Algebren einzubinden. Dieser Abschnitt zeigt, daß dies bei Operatoren mit  $\sigma$ -endlichem Urbildraum bzw. Bildraum in sinnvoller Weise möglich ist. - Grundlage dafür ist eine Kombination der zentralen Zusammenhänge der Tomita-Takesaki-Theorie und des sog. "Kommutanten Radon-Nikodym-Satzes". - Zunächst wird ein  $C^*$ -theoretisches Analogon des Grothendieckschen Konzeptes der  $\alpha$ -nuklearen Operatoren diskutiert. Dabei stehen ordnungstheoretische Fragen im Vordergrund. Ist  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra, so gibt es eine Abbildung  $\nu_\alpha^\varphi$  von  ${}_K M \tilde{\otimes}_\alpha A$  in  $\mathcal{L}(M, A)$  ( $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\alpha$  eine  $C^*$ -Tensornorm,  $\varphi$  ein treuer, normaler Zustand auf  $M$ ). Jeder Operator  $\nu_\alpha^\varphi(z)$  ( $z \in {}_K M \tilde{\otimes}_\alpha A$ ) ist kompakt. Jeder selbstadjungierte Operator  $\nu_\alpha^\varphi(z)$  ist Differenz vollständig positiver (kompakter) Operatoren  $\nu_\alpha^\varphi(z_1), \nu_\alpha^\varphi(z_2)$  ( $z_1, z_2 \in {}_K M \tilde{\otimes}_\alpha A$ ) (2.2, Kor.1). Der zentrale Zusammenhang ist in 2.4 formuliert:  $\nu_{\min}^\varphi$  bettet  ${}_K M \tilde{\otimes}_{\min} A$  ordnungsisomorph in  $\mathcal{L}(M, A)$  ein, wobei in  $\mathcal{L}(M, A)$  der Kegel der vollständig positiven Operatoren zugrunde

liege. - Ist  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\varphi$  und  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  ( $A$  eine  $C^*$ -Algebra), so kann  $T$  eine Linearform  $\phi^e(T)$  auf  ${}_k A \otimes M$  zugeordnet werden.  $T$  ist genau dann vollständig positiv, wenn  $\phi^e(T) \geq 0$ . Allerdings ist der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $\phi^e(T)$  nicht kanonisch; deshalb wird in 2.7 untersucht, inwiefern die Zuordnung  $T \longmapsto \phi^e(T)$  für  $T$  beschreibenden Charakter hat: Ist  $T$  vollständig positiv, so kann eine Stinespring-Zerlegung von  $T$  explizit über eine GNS-Konstruktion mit  $\phi^e(T)$  gewonnen werden.

Sei  $M$  eine  $W^*$ -Algebra.  $M$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn  $M$  höchstens abzählbar viele, paarweise orthogonale Projektionen enthält. Eine  $W^*$ -Algebra ist genau dann  $\sigma$ -endlich, wenn sie einen treuen, normalen Zustand besitzt ([32]: II, 3.19). - Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\varphi$ . Die Von-Neumann-Algebra  $\pi_e(M)$  besitzt einen zyklisch-separierenden Vektor:  $\xi_\varphi \in H_\varphi$ .  $\xi_\varphi$  ist auch zyklischer Vektor von  $\pi_e(M)'$  ([32]: II, 3.17); also gilt:  $M \cong \pi_e(M)$  und  $\overline{\pi_e(M)\xi_\varphi} = H_\varphi = \overline{\pi_e(M)'\xi_\varphi}$ . - Sei nun  $S$  der Abschluß des konjugiertlinearen Operators  $S^0$  mit  $S^0(\pi_e(x)\xi_\varphi) := \pi_e(x^*)\xi_\varphi$  ( $x \in M$ ). Wie man leicht sieht, gilt dann:  $S^*(x'\xi_\varphi) = x'^*\xi_\varphi \quad \forall x' \in \pi_e(M)'$ . Weiter ist  $S = S^{-1}$ ,  $S^* = (S^*)^{-1}$ .  $\Delta := S^*S$  ist ein positiver, selbstadjungierter Operator auf  $H_\varphi$  mit dem Träger  $s(\Delta) = \mathbb{1}$ ;  $\Delta$  heißt der

modulare Operator (bzgl.  $\varphi$ ).  $\Delta^{-1} = S S^*$ . Sei  $S = J \Delta^{1/2}$  die polare Zerlegung von  $S$ ; dann ist  $J$  eine konjugiert-lineare (partielle) Isometrie mit  $J^2 = 1$ ,  $J = J^* = J^{-1}$ .  $J$  heißt die kanonische Konjugation in  $H_\varphi$ . Da  $S = J \Delta^{1/2} = S^{-1} = \Delta^{-1/2} J^{-1} = \Delta^{-1/2} J$ , gilt:  $J \pi_\varphi(x) \xi_\varphi = \Delta^{-1/2} S \pi_\varphi(x) \xi_\varphi$   
 $\forall x \in M$ . Für die letztgenannten Zusammenhänge vgl.

[30]. - Aus der sog. Tomita-Takesaki-Theorie ist bekannt, daß  $\mathcal{J}_\varphi: \pi_\varphi(x) \longmapsto J \pi_\varphi(x) J$  ( $x \in M$ ) ein Antiisomorphismus von  $\pi_\varphi(M)$  auf  $\pi_\varphi(M)'$  ist.

Für  $x' \in \pi_\varphi(M)'$  sei  $\langle \theta_\varphi(x'), x \rangle := (\pi_\varphi(x) x' \xi_\varphi | \xi_\varphi)$  ( $x \in M$ );  $\theta_\varphi$  ist eine vollständig positive Bijektion von  $\pi_\varphi(M)'$  auf  $[\varphi] \subseteq M_*$  mit der Norm  $\leq 1$ , wobei  $[\varphi]$  der von  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n \cdot \varphi]$  erzeugte (normdichte) Unterraum von  $M_*$  ist;  $\theta_\varphi^{-1}$  ist vollständig positiv ([30]: 10.25; [32]: IV, 3.10). Für  $x \in M$  setze nun

$$j_\varphi(x) := \theta_\varphi \mathcal{J}_\varphi \pi_\varphi(x);$$

$j_\varphi$  ist eine vollständig positive, konjugiert-lineare Bijektion von  $M$  auf  $[\varphi] \subseteq M_*$  mit der Norm  $\leq 1$ ;  $j_\varphi^{-1}$  ist vollständig positiv. Es ist  $\forall x, y \in M$ :

$$\begin{aligned} \langle j_\varphi(x), y \rangle &= (J \pi_\varphi(x) J \pi_\varphi(y) \xi_\varphi | \xi_\varphi) \\ &= \overline{\langle x, j_\varphi(y) \rangle}. \end{aligned}$$

Sei nun  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\alpha$  eine  $C^*$ -Tensor-

norm; dann betrachte die Abbildung  $\nu_\alpha^e$  von  ${}_k^M \tilde{\otimes}_\alpha A$  in  $\mathcal{L}(M, A)$  mit

$$\nu_\alpha^e(z)(x) := \sum_i \langle j_e(x_i), x \rangle y_i$$

( $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in {}_k^M \tilde{\otimes}_\alpha A$ ,  $x \in M$ ).  $\nu_\alpha^e$  ist stetig mit der Norm  $\leq 1$ , denn für  $\psi \in A^*$ ,  $\|\psi\| \leq 1$  ist

$$|\langle \nu_\alpha^e(z)(x), \psi \rangle| = |\sum_i \langle j_e(x_i), x \rangle \langle y_i, \psi \rangle|$$

$$= |\sum_i \langle x_i, \overline{j_e(x)} \rangle \langle y_i, \psi \rangle|$$

$$= |\langle z, \overline{j_e(x)} \otimes \psi \rangle|$$

$$\leq \|z\|_\alpha \|\overline{j_e(x)} \otimes \psi\|_{\alpha^*}$$

$$\leq \|z\|_\alpha \|x\|.$$

$\nu_\alpha^e$  kann also fortgesetzt werden zu einer Abbildung von  ${}_k^M \tilde{\otimes}_\alpha A$  in  $\mathcal{L}(M, A)$ , die ebenfalls mit  $\nu_\alpha^e$  bezeichnet werde. Wie man leicht sieht, gilt  $\forall z \in {}_k^M \tilde{\otimes}_\alpha A$ ,  $\forall x \in M$ ,  $\forall \psi \in A^*$ :

$$\langle \nu_\alpha^e(z)(x), \psi \rangle = \langle z, \overline{j_e(x)} \otimes \psi \rangle.$$

Jeder Operator  $\nu_\alpha^e(z)$  ( $z \in {}_k^M \tilde{\otimes}_\alpha A$ ) ist kompakt. - Im folgenden sollen die ordnungstheoretischen Eigenschaften

von  $\nu_x^{\varphi}$  herausgearbeitet werden.

LEMMA:(2.1) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\varphi \in A_+^*$ . Dann ist für jede Wahl von Elementen  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $b_1, \dots, b_n \in B$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):  $\sum_{i=1}^n b_i^* \langle a_i^* a_j, \varphi \rangle b_j \geq 0$ .

Beweis: Betrachte den Operator  $T_\varphi$  von  $A$  in  $B$  mit  $T_\varphi(a) := \varphi(a)1$  ( $a \in A$ ).  $T_\varphi$  ist vollständig positiv, denn

$$T^{(n)}([a_i^* a_j]) = [T_\varphi(a_i^* a_j)] = [\varphi(a_i^* a_j)1]$$

und  $[\varphi(a_i^* a_j)] \in M_n^+$  ( $a_i \in A$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) (vgl. 1.3).  $[\varphi(a_i^* a_j)]$  ist also Summe von Elementen der Form  $[\bar{\lambda}_i \lambda_j] \in M_n$  ( $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). Daher ist  $[\varphi(a_i^* a_j)1] \geq 0$ . - Daraus folgt die Behauptung. ■

PROPOSITION:(2.2) Sei  $M$  eine  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\varphi$  und  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Für jede  $C^*$ -Tensornorm  $\alpha$  und  $\forall z \in {}_K^M \tilde{\otimes}_\alpha A$  gilt:  $\nu_\alpha^\varphi(z^* z) \in \mathcal{L}(M, A)$  ist vollständig positiv.

Beweis: Sei  $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in {}_K^M \otimes A$  und  $0 \leq [w_k^* w_l] \in M_n(M)$ .

Dann ist nach 2.1:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_\alpha^e(z^*z)^{(n)}([w_k^*w_l]) &= [\mathcal{N}_\alpha^e(z^*z)(w_k^*w_l)] \\
 &= \sum_{ij} \langle j_e(x_i^*x_j), w_k^*w_l \rangle y_i^*y_j \\
 &= \sum_{ij} [y_i^* \langle x_i^*x_j, j_e(w_k^*w_l) \rangle y_j] \\
 &= \sum_{ijkl} [y_i]_k^* \langle j_e(w_k^*w_l) \rangle, [x_i]_k^* [x_j]_l \rangle [y_j]_l \\
 &= \sum_{ijkl} [y_i]_k^* \langle j_e^{(n)}([w_k^*w_l]) \rangle, [x_i]_k^* [x_j]_l \rangle [y_j]_l \\
 &\geq 0;
 \end{aligned}$$

dabei sei  $[x_i]_m \in M_n(k^M)$  bzw.  $[y_i]_m \in M_n(A)$  diejenige Matrix mit  $x_i$  bzw.  $y_i$  in der  $(1,m)$ -ten Position und Null sonst. - Ist  $z \in {}_k^M \tilde{\otimes} A$ ,  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ,  $z_n \in {}_k^M \otimes A$ , so gilt:  $\mathcal{N}_\alpha^e(z^*z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_\alpha^e(z_n^*z_n)$  ist vollständig positiv. ■

**KOROLLAR 1:** Zu jedem selbstadjungierten Operator  $T =: \mathcal{N}_\alpha^e(z) \in \mathcal{L}(M, A)$  ( $z \in {}_k^M \tilde{\otimes} A$ ) gibt es vollständig positive Operatoren  $T_1 =: \mathcal{N}_\alpha^e(z_1)$ ,  $T_2 =: \mathcal{N}_\alpha^e(z_2) \in \mathcal{L}(M, A)$  ( $z_1, z_2 \in {}_k^M \tilde{\otimes} A$ ) mit  $T = T_1 - T_2$ .

Beweis: Sei  $T = \nu_{\alpha}^{\psi}(z) \in \mathcal{L}(M, A)$  selbstadjungiert. Zunächst gilt: Es gibt ein Element  $z_S \in ({}_k^M \tilde{\otimes}_{\alpha} A)_S$  mit  $\nu_{\alpha}^{\psi}(z_S) = T$ . Sei o.B.d.A.  $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in {}_k^M \otimes A$ . Für  $x \in M$  ist dann

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha}^{\psi}(z^*)(x) &= \sum_i \langle j_{\psi}(x_i^*), x \rangle y_i^* \\ &= \overline{\sum_i \langle j_{\psi}(x_i), x^* \rangle} y_i^* \\ &= (\sum_i \langle j_{\psi}(x_i), x^* \rangle y_i)^* \\ &= (\nu_{\alpha}^{\psi}(z)(x^*))^* = (T(x^*))^* \\ &= T(x); \end{aligned}$$

d.h.  $T = \nu_{\alpha}^{\psi}(z) = \nu_{\alpha}^{\psi}(z^*)$ . Setze  $z_S := 1/2(z+z^*)$ ; dann gilt  $T = \nu_{\alpha}^{\psi}(z_S)$ . - Setzt man  $T_1 := \nu_{\alpha}^{\psi}(z_S^+)$ ,  $T_2 := \nu_{\alpha}^{\psi}(z_S^-)$ , so folgt die Behauptung. ■

KOROLLAR 2: Jeder Operator  $T = \nu_{\alpha}^{\psi}(z) \in \mathcal{L}(M, A)$  ( $z \in {}_k^M \tilde{\otimes}_{\alpha} A$ ) ist vollständig beschränkt.

KOROLLAR 3: Sei  $T = \nu_{\alpha}^{\psi}(z) \in \mathcal{L}(M, A)$  ( $z \in {}_k^M \tilde{\otimes}_{\alpha} A$ ). Dann gibt es eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Operatoren endlichen Rangs in  $\mathcal{L}(M, A)$  mit  $\|T - T_n\|_{\infty} \longrightarrow 0$ .

Beweis: Sei  $z \in ({}_K M \otimes_{\alpha} A)_+$ ; dann ist  $\|\nu_{\alpha}^{\psi}(z)\|_{\infty} = \|\nu_{\alpha}^{\psi}(z)(1)\| \leq \|z\|_{\alpha}$ . Also ist  $\forall z \in {}_K M \otimes_{\alpha} A$ :  
 $\|\nu_{\alpha}^{\psi}(z)\|_{\infty} \leq 4\|z\|_{\alpha}$ . Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

LEMMA:(2.3) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$  und  $\psi^{(n)} := 1/n \begin{pmatrix} \psi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \psi \end{pmatrix} \in M_n(M_*)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:  $[\psi^{(n)}] \subseteq M_n([\psi])$ .

Beweis: Sei zunächst  $n=2$  und  $\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n \cdot \psi^{(2)}]$ ,  
d.h.  $\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \leq \lambda \psi^{(2)}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ). Es ist  $\begin{pmatrix} a^*a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^*a \end{pmatrix} \in M_2(M)_+$   
 $\forall a \in M$ ; also gilt:  $0 = \psi_1, \psi_{22}$  und  $\psi_1(a^*a), \psi_{22}(a^*a) \leq$   
 $\lambda \psi(a^*a) \quad \forall a \in M$ , d.h.  $\psi_1, \psi_{22} \in [\psi]$ . - Weiter ist  
 $\begin{pmatrix} a^*a & a^*a \\ a^*a & a^*a \end{pmatrix} \in M_2(M)_+ \quad \forall a \in M$ ; also hat man

$$(\psi_{12} + \psi_{21}^*)(a^*a) \leq (\lambda\psi - \psi_{11} - \psi_{22})(a^*a)$$

$$\leq \lambda\psi(a^*a) \quad \forall a \in M,$$

d.h.  $\psi_{12} + \psi_{21}^* \leq \lambda\psi$ . Da  $\begin{pmatrix} a^*a & -a^*a \\ -a^*a & a^*a \end{pmatrix} \in M_2(M)_+ \quad \forall a \in M$ , folgt eben-  
so  $-(\psi_{12} + \psi_{21}^*) \leq \lambda\psi$ . Damit gilt:

$$0 \leq \lambda\psi - (\psi_{12} + \psi_{21}^*) \leq \lambda\psi - (\psi_{12} + \psi_{21}^*) + \lambda\psi + (\psi_{12} + \psi_{21}^*)$$

$$\leq 2\lambda\psi,$$

d.h.  $\lambda\psi - (\psi_{12} + \psi_{21}^*) \in [\psi]$  und daher  $\psi_{12} + \psi_{21}^* \in [\psi]$ . -

Es ist weiter  $\begin{pmatrix} a & iaa \\ -iaa & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -iaa \\ iaa & a \end{pmatrix} \in M_2(M)_+ \quad \forall a \in M$ . Daher folgt wie oben  $i(e_{12} - e_{12}^*), -i(e_{12} - e_{12}^*) \in \lambda \mathcal{V}$  und  $i(e_{12} - e_{12}^*) \in [\mathcal{V}]$ . Also ist

$$e_{12} = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{12}^*) + \frac{1}{2i}i(e_{12} - e_{12}^*) \in [\mathcal{V}] \quad . \quad -$$

Sei nun  $n=3$  und

$$0 \leq \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12}^* & e_{22} & e_{23} \\ e_{13}^* & e_{23}^* & e_{33} \end{pmatrix} \leq \lambda \mathcal{V}^{(3)} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+).$$

Dann betrachte die Teilmatrizen  $\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12}^* & e_{22} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{23}^* & e_{33} \end{pmatrix}$ ; wie oben folgt, daß diese in  $M_2([\mathcal{V}])$  enthalten sind; ebenso wie im Falle  $n=2$  kann dann gezeigt werden, daß  $e_{13} \in [\mathcal{V}]$ . - Induktiv ergibt sich also:  $[\mathcal{V}^{(n)}] \subseteq M_n([\mathcal{V}])$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

THEOREM: (2.4) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\varphi$  und  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann bettet  $\nu_{\min}^{\varphi}$  die  $C^*$ -Algebra  ${}_k M \tilde{\otimes}_{\min} A$  ordnungsisomorph in  $\mathcal{L}(M, A)$  ein; dabei liege in  $\mathcal{L}(M, A)$  der Kegel der vollständig positiven Operatoren zugrunde.

Beweis: Sei  $z \in {}_k M \tilde{\otimes}_{\min} A$  und  $\nu_{\min}^{\varphi}(z) = 0$ .

Ist  $[\mathcal{V}] \ni \omega := j_{\varphi}(x)$  ( $x \in M$ ) und  $\gamma \in A^*$ , so gilt:

$$\langle z, \bar{\omega} \otimes \psi \rangle = \langle \nu_{\min}^e(z)(x), \psi \rangle = 0.$$

Also ist  $\forall \phi \in [\psi] \otimes A^* \cap S({}_k M \otimes A): \langle z, \phi \rangle = 0$ . Sei  $g \in M_*$ ; dann gibt es eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementen in  $[\psi]$  mit  $g_n \longrightarrow g$ . Für  $\gamma \in A^*$  ist dann  $\bar{g} \otimes \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}_n \otimes \gamma$  in  $({}_k M_{\min}^{\otimes} A)^*$ . Folglich ist  $\langle z, \bar{g} \otimes \gamma \rangle = 0$ ; d.h. aber  $\langle z, \phi \rangle = 0 \forall \phi \in {}_k M_* \otimes A^* \cap S({}_k M \otimes A) =: \Gamma$ .  $\Gamma$  ist trennend und invariant, definiert also eine  $C^*$ -Norm auf  ${}_k M \otimes A$  mit dem Zustandsraum  $\mathcal{Y}_\Gamma = \bar{\Gamma}^\sigma$  ( $\sigma := \sigma(({}_k M \otimes A)^d, {}_k M \otimes A)$ ) (1.4). Da  $\min$  die kleinste  $C^*$ -Tensornorm ist, folgt  $\mathcal{Y}_\Gamma = \mathcal{Y}_{\min}$ . Da auf beschränkten Teilmengen von  $({}_k M_{\min}^{\otimes} A)^*$  die Topologien  $\sigma(({}_k M \otimes A)^d, {}_k M \otimes A)$  und  $\sigma(({}_k M_{\min}^{\otimes} A)^*, {}_k M_{\min}^{\otimes} A)$  zusammenfallen, gilt also  $\forall \phi \in \mathcal{Y}_{\min}: \langle z, \phi \rangle = 0$  und damit  $z = 0$ . -

Sei nun  $\nu_{\min}^e(z) \in \mathcal{L}(M, A)$  ( $z \in {}_k M_{\min}^{\otimes} A$ ) vollständig positiv. Für jede Wahl von Elementen  $x_1, \dots, x_n \in M, y_1, \dots, y_n \in A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\forall \psi \in \mathcal{Y}(A)$  ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \sum_{ij} y_i^* \nu_{\min}^e(z) (x_i^* x_j) y_j, \psi \rangle \\ &= \langle \sum_{ij} j_{\psi}(x_i^* x_j) \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi, z \rangle. \end{aligned}$$

Sei  $0 \neq [\bar{e}_{ij}] \in M_n([\bar{e}])$ . Dann gibt es positive Matrizen  $[x_i^{(k)*} x_j^{(k)}] \in M_n(M)$  mit  $j_{\psi}^{(n)}(\sum_k [x_i^{(k)*} x_j^{(k)}]) = [\bar{e}_{ij}]$ , da  $j_{\psi}^{-1}$  vollständig positiv ist. Also gilt:

$$\begin{aligned}
 & \langle \sum_{ij} \bar{e}_{ij} \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi, z \rangle \\
 &= \sum_k \langle \sum_{ij} j e(x_i^{(k)*} x_j^{(k)}) \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi, z \rangle \\
 &\geq 0. -
 \end{aligned}$$

Sei nun  $[\bar{e}_{ij}] \in M_n({}_k M^*)_+$ . Da  $[\bar{e}^{(n)}] \subseteq M_n([\bar{e}])$  und  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [0, m \cdot \bar{e}^{(m)}]$  dicht liegt in  $M_n({}_k M^*)_+$  ([30]: 10.25), gibt es eine Folge  $([\bar{e}_{ij}^{(m)}])_{m \in \mathbb{N}}$  von positiven Linearformen aus  $M_n([\bar{e}])$  mit  $[\bar{e}_{ij}^{(m)}] \longrightarrow [\bar{e}_{ij}]$ . Dann gilt aber auch  $\max_{ij} \|\bar{e}_{ij} - \bar{e}_{ij}^{(m)}\| \longrightarrow 0$  für  $m \longrightarrow \infty$  und

$$\begin{aligned}
 & \|\sum_{ij} \bar{e}_{ij} \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi - \sum_{ij} \bar{e}_{ij}^{(m)} \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi\|_{\min^*} \\
 &= \|\sum_{ij} \bar{e}_{ij} - \bar{e}_{ij}^{(m)} \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi\|_{\min^*} \\
 &\leq \max_{ij} \|\bar{e}_{ij} - \bar{e}_{ij}^{(m)}\| \sum_{ij} \|L_{y_i}^* R_{y_j} \psi\| \longrightarrow 0;
 \end{aligned}$$

folglich ist für jede Wahl von Elementen  $y_1, \dots, y_n \in A$ , für jede Linearform  $[\bar{e}_{ij}] \in M_n({}_k M^*)_+$  und  $\forall \psi \in \mathcal{S}(A)$ :

$$\langle \sum_{ij} \bar{e}_{ij} \otimes L_{y_i}^* R_{y_j} \psi, z \rangle \geq 0.$$

Da  $\forall x_1, \dots, x_n \in {}_k M$  die Linearform  $[L_{x_i}^* R_{x_j} \bar{e}]$  positiv ist, hat man also

$$\langle L_{y^*} R_y \bar{e} \otimes \psi, z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in {}_k M \otimes A, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(A).$$

Betrachte nun die Menge

$$S({}_k M \otimes A) \supseteq \Delta_{\bar{\psi}} := \{ L_{y^*} R_y \bar{\psi} \otimes \psi : y \in {}_k M \otimes A, \psi \in \mathcal{Y}(A), \\ \bar{\psi} \otimes \psi(y^* y) = 1 \}.$$

$\Delta_{\bar{\psi}}$  ist nach 1.3 trennend und invariant; nach 1.4 definiert  $\Delta_{\bar{\psi}}$  eine  $C^*$ -Norm auf  ${}_k M \otimes A$  mit dem Zustandsraum  $\mathcal{Y}_{\Delta_{\bar{\psi}}} = \overline{\text{co}} \Delta_{\bar{\psi}}$ . Daher ist  $\forall \phi \in \mathcal{Y}_{\min}: \langle \phi, z \rangle \geq 0$ , d.h. aber  $z \geq 0$ . ■

Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$ ,  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{Z}(A, M)$ ; dann ist  $j_\psi T \in \mathcal{Z}({}_k A, M_*)$ . Die zu  $j_\psi T$  gehörige Linearform auf  ${}_k A \otimes M$  werde mit  $\phi^\psi(T)$  bezeichnet. Die Zuordnung  $T \longmapsto \phi^\psi(T)$  ist injektiv, da  $[\psi]$  dicht liegt in  $M_*$ .  $\phi^\psi(T)$  ist stetig auf  ${}_k A \otimes_\pi M$ . Sei umgekehrt  $\phi$  eine stetige Linearform auf  ${}_k A \otimes_\pi M$ ; dann werde der zu  $\phi$  gehörige Operator von  ${}_k A$  in  $M^*$  mit  $T_\phi$  bezeichnet. Gilt nun  $T_\phi({}_k A) \subseteq [\psi] \subseteq M_*$ , so ist  $j_\psi^{-1} T_\phi \in \mathcal{Z}(A, M)$ ; diese Beziehung folgt sofort aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. - Die Zuordnung  $T \longmapsto \phi^\psi(T)$  hat befriedigende ordnungstheoretische Eigenschaften:

PROPOSITION:(2.5) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra

mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$  und  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann gilt:

a) Ist  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  selbstadjungiert, so ist  $\phi^\psi(T)$  eine selbstadjungierte Linearform auf  ${}_k A \otimes M$ .

b)  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  ist genau dann vollständig positiv, wenn  $\phi^\psi(T) \geq 0$ .

Beweis: a) Sei  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  selbstadjungiert und  $x \in {}_k A$ ,  $y \in M$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \phi^\psi(T)^*(x \otimes y) &= \overline{\phi^\psi(T)(x^* \otimes y^*)} \\ &= \overline{\langle j_\psi T(x^*), y^* \rangle} \\ &= \overline{\langle j_\psi T(x)^*, y^* \rangle} \\ &= \overline{(\langle j_\psi T(x)^*, j_\psi(y^*) \rangle \xi_\psi | \xi_\psi)} \\ &= \langle j_\psi T(x), y \rangle \\ &= \phi^\psi(T)(x \otimes y). \end{aligned}$$

b) Sei  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  vollständig positiv. Dann ist

für  $x = \sum_i x_i \otimes y_i \in {}_K A \otimes M$ :

$$\begin{aligned}\phi^*(T)(x^*x) &= \phi^*(T)\left(\sum_j x_i^* x_j \otimes y_i^* y_j\right) \\ &= \sum_j \langle j_\psi T(x_i^* x_j), y_i^* y_j \rangle \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

da  $j_\psi T$  vollständig positiv ist ([18]: 2.7). Ist umgekehrt  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  und  $\phi^*(T) \geq 0$ , so ist ebenfalls nach [18]: 2.7 :  $T_{\phi^*(\pi)}: {}_K A \longrightarrow [\psi] \subseteq M_*$  vollständig positiv. Da aber  $j_\psi^{-1}$  vollständig positiv ist, ist auch  $T = j_\psi^{-1} T_{\phi^*(\pi)}$  vollständig positiv. ■

PROPOSITION: (2.6) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$ ,  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  vollständig positiv.  $\phi^*(T)$  ist stetig auf  ${}_K A \otimes_{\max} M$ .

Beweis: Nach 2.5 ist  $\phi^*(T) \geq 0$ . Sei o.B.d.A.  $\phi^*(T)(1 \otimes 1) \neq 0$ . (Ist  $\phi^*(T) = 0$ , so folgt nach 1.2 :  $\phi^*(T) = 0$ .) Dann ist  $\phi^*(T)(1 \otimes 1)^{-1} \phi^*(T) \in S({}_K A \otimes M)$ . Daraus folgt die Behauptung. ■

THEOREM:(2.7) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$ ,  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  vollständig positiv. Dann gibt es eine Darstellung  $\{\pi, K\}$  von  $A$  und einen Operator  $V \in \mathcal{L}(H_\psi, K)$  mit

$$\pi_\psi(T(a)) = V^* \pi(a) V \quad \forall a \in A,$$

$$K = \overline{H_\psi \pi(T)} = [\pi(A) V H_\psi], \quad \pi(a) = \pi_\psi(T)(a \otimes 1) \quad \forall a \in A.$$

Beweis: Nach 2.5 und 2.6 ist  $0 \neq \phi^\psi(T) =: \phi$  stetig auf  ${}_k A \otimes_{\max} M$ , kann also in eindeutiger Weise zu einer positiven Linearform auf  ${}_k A \otimes_{\max} M$  fortgesetzt werden, die ebenfalls mit  $\phi$  bezeichnet werde. Betrachte die Darstellung  $\{\pi_\phi, H_\phi\}$  von  ${}_k A \otimes_{\max} M$ . Für  $a \in A$  setze  $\pi(a) := \pi_\phi(a \otimes 1) \in \mathcal{L}(\overline{H_\phi})$ .  $\{\pi, \overline{H_\phi}\}$  ist eine Darstellung von  $A$ . Sei  $W: \pi_\psi(M) \xi_\psi \longrightarrow \overline{H_\phi}$  definiert durch  $W(\pi_\psi(y) \xi_\psi) := \pi_\phi(1 \otimes y) \xi_\phi \in \overline{H_\phi}$  ( $y \in M$ );  $W$  ist stetig, denn  $\|\pi_\phi(1 \otimes y) \xi_\phi\|^2 = (\pi_\phi(1 \otimes y^* y) \xi_\phi | \xi_\phi) = \phi(1 \otimes y^* y) = \langle j_\psi T(1), y^* y \rangle \leq \lambda \psi(y^* y) = \lambda \|\pi_\psi(y) \xi_\psi\|^2$  ( $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) und konjugiertlinear.  $W$  kann deshalb in eindeutiger Weise fortgesetzt werden zu einem konjugiertlinearen Operator von  $H_\psi$  in  $\overline{H_\phi}$ , der ebenfalls mit  $W$  bezeichnet werde. Es gilt  $\forall x, y \in M, \forall a \in A$ :

$$(W^* \pi(a) W \pi_\psi(x) \xi_\psi | \pi_\psi(y) \xi_\psi) = (\pi(a) W \pi_\psi(x) \xi_\psi | W \pi_\psi(y) \xi_\psi)_{H_\phi}$$

$$= (\pi_\phi(a \otimes 1) \pi_\phi(1 \otimes x) \xi_\phi | \pi_\phi(1 \otimes y) \xi_\phi)$$

$$= \phi(a \otimes y^* x) = \langle j_\psi(T(a), y^* x) \rangle$$

$$= (J \pi_\psi(T(a)) J \pi_\psi(x) \xi_\psi | \pi_\psi(y) \xi_\psi),$$

d.h.  $W^*_{\pi}(a)W = J \pi_\psi(T(a)) J \quad \forall a \in A$ . Setze nun  $V := WJ$ ; dann ist  $V^*_{\pi}(a)V = \pi_\psi(T(a)) \quad \forall a \in A$  und  $V \in \mathcal{L}(H_\psi, \overline{H_\phi})$ . Schließlich ist klar, daß  $\overline{H_\phi} = [\pi(A) V H_\psi]$ . ■

### BEISPIELE: (2.8)

2.8.1 Sei  $M_n$  die  $W^*$ -Algebra der  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Setze  $t := 1/n \operatorname{tr}$ , wobei  $\operatorname{tr}$  die Spur auf  $M_n$  bezeichnet.  $t$  ist ein treuer, normaler Zustand auf  $M_n$ . Die Abbildung  $J: \pi_t(a) \xi_t \longmapsto \pi_t(a^*) \xi_t \quad (a \in M_n)$  ist eine konjugiertlineare Isometrie von  $H_t$  in  $H_t$ . Folglich ergibt sich  $\forall a, x \in M_n$ :

$$\langle j_t(a), x \rangle = (J \pi_t(a) J \pi_t(x) \xi_t | \xi_t)$$

$$= (J \pi_t(a) \pi_t(x^*) \xi_t | \xi_t)$$

$$= (\pi_t(x) \pi_t(a^*) \xi_t | \xi_t)$$

$$= \langle t, x a^* \rangle,$$

d.h.  $j_t(a) = R_a^* t \quad \forall a \in M_n$ .

2.8.2 Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\{e_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  die kanonische Basis von  $M_n$ . Jedes Element  $x \in M_n \otimes A$  (bzw.  $A \otimes M_n$ ) besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = \sum_{ij} e_{ij} \otimes x_{ij}$  (bzw.  $x = \sum_{ij} x_{ij} \otimes e_{ij}$ ) mit  $x_{ij} \in A$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ).

2.8.3 Sei  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$ ; dann setze  $z := \sum_{ij} e_{ij} \otimes T(e_{ij})$ . Es ist damit  $v_{\min}^t(z) = T$ , denn für  $x := [\lambda_{ij}] \in M_n$  ist

$$\begin{aligned} v_{\min}^t(z)(x) &= \sum_{ij} \langle j_t(e_{ij}), x \rangle T(e_{ij}) \\ &= \sum_{ij} t(x e_{ji}) T(e_{ij}) \\ &= \sum_{ij} \lambda_{ij} T(e_{ij}) \\ &= T(x). \end{aligned}$$

2.8.4 Sei  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ ; dann ist für  $x = \sum_{ij} x_{ij} \otimes e_{ij} \in {}_k A \otimes M_n$ :

$$\begin{aligned} \phi^t(T')(x) &= \sum_{ij} \langle j_t T(x_{ij}), e_{ij} \rangle \\ &= \sum_{ij} t(e_{ij} T(x_{ij})^*). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $\phi := [\phi_{ij}] \in M_n({}_k A^*)$ ; dann ist für  $x \in {}_k A$  und  $y := [\lambda_{ij}] \in M_n$ :

$$\langle T_\phi(x), y \rangle = \phi(x \otimes y) = \phi(x \otimes [\lambda_{ij}])$$

$$= \phi(\sum_{ij} \lambda_{ij} x \otimes e_{ij}) = \sum_{ij} \bar{e}_{ij}(\lambda_{ij} x)$$

$$= \sum_{ij} \lambda_{ij} \bar{e}_{ij}(x) = \langle [\bar{e}_{ij}(x)], y \rangle,$$

d.h.  $T_\phi(x) = [\bar{e}_{ij}(x)] \in M_n^*$ . Nun ist aber für  $x \in A$ :

$$j_t(n [\bar{e}_{ij}(x)]) = n \cdot R_{[\bar{e}_{ij}(x)]}^* t = T_\phi(x); \text{ d.h.}$$

$$j_t^{-1} T_\phi(x) = j_t^{-1} j_t(n [\bar{e}_{ij}(x)]) = n [\bar{e}_{ij}(x)] \in M_n$$

$\forall x \in A.$

### 3. INJEKTIVE VARIANTEN DER MAXIMALEN $C^*$ -TENSOR-NORM UND FORTSETZBARE VOLLSTÄNDIG POSITIVE OPERATOREN

Die Konstruktion der  $C^*$ -Tensornormen  $\|\cdot\|_{\max}$ ,  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$  und  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$  basiert darauf, daß  $\mathcal{L}(H)$  für jeden Hilbert-Raum  $H$  injektiv ist und jede  $C^*$ -Algebra als  $C^*$ -Unter-algebra eines Raumes  $\mathcal{L}(H)$  realisiert werden kann. Die Norm  $\|\cdot\|_{\max}$  (bzw.  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$ , bzw.  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$ ) auf  $A \otimes B$  wird unabhängig von der speziellen Wahl der treuen Darstellung durch Einbettung von  $A \otimes B$  in  $\mathcal{L}(H) \otimes B$  (bzw.  $A \otimes \mathcal{L}(K)$ , bzw.  $\mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(K)$ ) gewonnen ( $A, B$   $C^*$ -Algebren).  $\|\cdot\|_{\max}$  ist die größte linksinjektive,  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$  die größte rechtsinjektive und  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$  die größte injektive  $C^*$ -Tensornorm. - Während in 3.8 der operatorentheoretische Kern der Variante  $\|\cdot\|_{\max}$ , nämlich die Fortsetzbarkeit vollständig positiver Operatoren diskutiert wird, gehen 3.5 und 3.7 der Frage nach, wann die maximale  $C^*$ -Tensornorm auf  $A \otimes B$  mit den Varianten  $\|\cdot\|_{\max}$  bzw.  $\|\cdot\|_{\max\backslash}$  zusammenfällt. Es ergeben sich Tensorproduktcharakterisierungen von WEP-Algebren (bzw. injektiven  $W^*$ -Algebren) und von nuklearen  $C^*$ -Algebren.

DEFINITION:(3.1) Sei  $\alpha$  eine  $C^*$ -Tensornorm.  $\alpha$  heißt

a) linksinjektiv (rechtsinjektiv), wenn für jede Wahl von  $C^*$ -Algebren  $A, B, C$  und für jeden injektiven Homomorphismus  $\psi: A \longrightarrow C$  der kanonische Homomorphismus  $\psi \otimes I_B: A \otimes_\alpha B \longrightarrow C \otimes_\alpha B$  ( $I_B \otimes \psi: B \otimes_\alpha A \longrightarrow B \otimes_\alpha C$ ) isometrisch ist.

b) injektiv, wenn  $\alpha$  links- und rechtsinjektiv ist.

BEISPIEL:(3.2) min ist injektiv.

Seien  $A, B, C$   $C^*$ -Algebren und  $\psi: A \longrightarrow C$  ein injektiver Homomorphismus. Dann kann  $A$  mit einer  $C^*$ -Unteralgebra von  $C$  identifiziert werden. Ist  $C \in \mathcal{L}(H)$ ,  $B \in \mathcal{L}(K)$ , so induziert  $\mathcal{L}(H \otimes K)$  auf  $A \otimes B$  und auf  $C \otimes B$  die minimale  $C^*$ -Tensornorm;  $\psi \otimes I_B$  ist also isometrisch.- Analog folgt, daß min rechtsinjektiv ist.

Zur Konstruktion injektiver Varianten der maximalen  $C^*$ -Tensornorm bedarf es noch einiger Vorbereitungen. Seien  $A, B, C$   $C^*$ -Algebren und  $T_1: A \longrightarrow \mathcal{C}$ ,  $T_2: B \longrightarrow C$  vollständig positive Operatoren mit kommutierenden Bildern. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten vollständig positiven Operator  $T: A \otimes_{\max} B \longrightarrow C$  mit  $T(x \otimes y) = T_1(x)T_2(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B$  ([32]: IV, 4.23). Als Konsequenz ergibt sich schnell: Sind  $A, B, C, D$   $C^*$ -

Algebren und  $T_1: A \longrightarrow C$ ,  $T_2: B \longrightarrow D$  vollständig positive Operatoren, so ist  $\tilde{T}_1: A \longrightarrow C \tilde{\otimes}_{\max} D$  bzw.  $\tilde{T}_2: B \longrightarrow C \tilde{\otimes}_{\max} D$  mit  $\tilde{T}_1(x) := T_1(x) \otimes 1 \ \forall x \in A$  bzw.  $\tilde{T}_2(y) := 1 \otimes T_2(y) \ \forall y \in B$  vollständig positiv.  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  sind Operatoren mit kommutierenden Bildern. Folglich ist  $T_1 \otimes T_2: A \otimes_{\max} B \longrightarrow C \tilde{\otimes}_{\max} D$  mit  $T_1 \otimes T_2(x \otimes y) := T_1(x) \otimes T_2(y) = (T_1(x) \otimes 1)(1 \otimes T_2(y)) = \tilde{T}_1(x) \tilde{T}_2(y)$  stetig und kann in eindeutiger Weise zu einem vollständig positiven Operator von  $A \tilde{\otimes}_{\max} B$  in  $C \tilde{\otimes}_{\max} D$  fortgesetzt werden.

Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $T: A \longrightarrow B$  vollständig positiv.  $T$  heißt Morphismus, wenn  $T(1) = 1$ . Eine  $C^*$ -Algebra  $A$  heißt injektiv, wenn es zu jedem Paar von  $C^*$ -Algebren  $(B, B_1)$  mit  $B_1 \trianglelefteq B$  und  $1_B \in B_1$  und zu jedem Morphismus  $\psi: B_1 \longrightarrow A$  einen Morphismus  $\hat{\psi}: B \longrightarrow A$  gibt, der  $\psi$  fortsetzt. Fundamentale Bedeutung für das folgende besitzt der von W. Arveson bewiesene Sachverhalt: Für jeden Hilbert-Raum  $H$  ist  $\mathcal{L}(H)$  injektiv ([5]).

THEOREM: (3.3) Es gibt eine größte linksinjektive  $C^*$ -Tensornorm  $/\max$ . Für jedes Paar  $(A, B)$  von  $C^*$ -Algebren und jede treue Darstellung  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  ist  $1 \cdot 1 / \max$  die von  $\mathcal{L}(H) \tilde{\otimes}_{\max} B$  bzgl.  $\eta \otimes I_B$  auf  $A \otimes B$  induzierte Norm.

Beweis: Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\eta : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $A$ . Dann setze  $\forall x \in A \otimes B$ :

$$\|x\|_{/\max} := \|\eta \otimes I_B(x)\|_{\max}.$$

1.  $\|\cdot\|_{/\max}$  ist unabhängig von der speziellen Wahl der treuen Darstellung  $\eta$  von  $A$  definiert.

Sei  $\zeta : A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\zeta)$  eine treue Darstellung von  $A$  und  $\forall x \in A \otimes B$ :

$$\|x\|_\zeta := \|\zeta \otimes I_B(x)\|_{\max}, \quad \|x\|_\eta := \|\eta \otimes I_B(x)\|_{\max}.$$

Es gibt Morphismen  $\hat{\eta}, \hat{\zeta}$ , die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{L}(H_\eta) \\ \zeta \downarrow & \hat{\zeta} \nearrow & \uparrow \hat{\eta} \\ \mathcal{L}(H_\zeta) & & \end{array}$$

Also ist  $\forall x \in A \otimes B$ :

$$\|x\|_\eta = \|\eta \otimes I_B(x)\|_{\max} = \|\hat{\eta} \hat{\zeta} \otimes I_B(x)\|_{\max}$$

$$= \|(\hat{\eta} \otimes I_B)(\hat{\zeta} \otimes I_B)(x)\|_{\max}$$

$$\leq \|\hat{\zeta} \otimes I_B(x)\|_{\max} = \|x\|_\zeta.$$

Mit analogem Argument folgt  $\|x\|_Z \leq \|x\|_Y \quad \forall x \in A \otimes B$ .

2.  $\|\cdot\|_{\max}$  ist linksinjektiv.

Seien  $A, B, C$   $C^*$ -Algebren,  $\psi: A \longrightarrow C$  ein injektiver Homomorphismus und  $\eta: C \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $C$ . Dann gilt  $\forall x \in A \otimes B$ :

$$\begin{aligned} \|\psi \otimes I_B(x)\|_{\max} &= \|(\eta \otimes I_B)(\psi \otimes I_B)(x)\|_{\max} \\ &= \|\eta \psi \otimes I_B(x)\|_{\max} \\ &= \|x\|_{\max}, \end{aligned}$$

da  $\eta \psi: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $A$  ist.

3. Sei  $\alpha$  eine linksinjektive  $C^*$ -Tensornorm und  $A, B$   $C^*$ -Algebren. Ist dann  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $A$ , so gilt  $\forall x \in A \otimes B$ :

$$\begin{aligned} \|x\|_\alpha &= \|\eta \otimes I_B(x)\|_\alpha \leq \|\eta \otimes I_B(x)\|_{\max} \\ &= \|x\|_{\max}. \end{aligned}$$

Sind  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $\eta: B \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $B$ , so kann analog durch  $A \tilde{\otimes}_{\max} \mathcal{L}(H_\eta)$  bzgl.  $I_A \otimes \eta$  eine Norm  $\|\cdot\|_{\max \setminus}$  auf  $A \otimes B$  induziert

werden, die unabhängig von der speziellen Wahl der treuen Darstellung  $\eta$  von  $B$  ist. Es gilt also das

KOROLLAR 1: Es gibt eine größte rechtsinjektive  $C^*$ -Tensornorm  $\max$ . Für jedes Paar  $(A, B)$  von  $C^*$ -Algebren und jede treue Darstellung  $\eta: B \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  ist  $\|\cdot\|_{\max}$  die von  $A \hat{\otimes}_{\max} \mathcal{L}(H_\eta)$  bzgl.  $I_A \otimes \eta$  auf  $A \otimes B$  induzierte Norm.

KOROLLAR 2: Es gibt eine größte injektive  $C^*$ -Tensornorm  $\wedge/\max$ . Für jedes Paar  $(A, B)$  von  $C^*$ -Algebren und für je zwei treue Darstellungen  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$ ,  $\zeta: B \longrightarrow \mathcal{L}(H_\zeta)$  ist  $\|\cdot\|_{\wedge/\max}$  die von  $\mathcal{L}(H_\eta) \hat{\otimes}_{\max} \mathcal{L}(H_\zeta)$  bzgl.  $\eta \otimes \zeta$  auf  $A \otimes B$  induzierte Norm.

Die Konstruktivität der oben beschriebenen Prozesse soll durch die folgenden Überlegungen erwiesen werden.

DEFINITION: (3.4) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra.  $A$  heißt eine WEP-Algebra (weak expectation property), wenn es zu jeder treuen Darstellung  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  einen

Morphismus  $E: \mathcal{L}(H_\eta) \longrightarrow \overline{\eta(A)}$  gibt, mit

$$E(\eta(a)x\eta(b)) = \eta(a)E(x)\eta(b)$$

$\forall a, b \in A, \forall x \in \mathcal{L}(H_\eta)$ . E heißt dann eine schwache Erwartung.

THEOREM: (3.5) Sei A eine  $C^*$ -Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen quivalent:

a)  $A \underset{/max}{\tilde{\otimes}} B = A \underset{max}{\otimes} B$  für jede  $C^*$ -Algebra B.

b) A ist eine WEP-Algebra.

Beweis: a)  $\implies$  b): Sei  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von A. Dann gibt es einen kanonischen Homomorphismus  $\psi: \eta(A) \underset{max}{\tilde{\otimes}} \eta(A)' \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$ . Nach Voraussetzung ist  $\eta(A) \underset{max}{\tilde{\otimes}} \eta(A)'$  eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $\mathcal{L}(H_\eta) \underset{max}{\tilde{\otimes}} \eta(A)'$ . Daher gibt es einen Hilbert-Raum  $K \supseteq H_\eta$  und einen Homomorphismus  $\hat{\psi}$  von  $\mathcal{L}(H_\eta) \underset{max}{\tilde{\otimes}} \eta(A)'$  in  $\mathcal{L}(K)$  mit  $\psi(x) = p\hat{\psi}(x)|_{H_\eta} \forall x \in \eta(A) \underset{max}{\tilde{\otimes}} \eta(A)'$  (p die orthogonale Projektion von K auf  $H_\eta$ ) ([12]: 2.10.2). Nun setze für  $x \in \mathcal{L}(H_\eta)$ :

$$E(x) := p\hat{\psi}(x \otimes 1)|_{H_\eta}.$$

$E$  ist ein Morphismus. Sei  $a' \in \eta(A)'$ ,  $\xi \in H_\eta$ ,  $x \in \mathcal{L}(H_\eta)$ .

$$\begin{aligned} E(x)a'\xi &= p\hat{\psi}(x \otimes 1)|_{H_\eta} a'\xi \\ &= p\hat{\psi}(x \otimes 1)\hat{\psi}(1 \otimes a')\xi \\ &= p\hat{\psi}(x \otimes a')\xi \\ &= \hat{\psi}(1 \otimes a')p\hat{\psi}(x \otimes 1)\xi \\ &= a'E(x)\xi. \end{aligned}$$

Also gilt:  $E(x) \in \eta(A)'' = \overline{\eta(A)}$ . Schließlich ist für  $a, b \in A$  und  $x \in \mathcal{L}(H_\eta)$ :

$$\eta(a)E(x)\eta(b) = E(\eta(a)x\eta(b)).$$

$b) \Rightarrow a)$ : Sei  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  die universelle Darstellung von  $A$ ; dann ist  $\overline{\eta(A)} \cong A^{**}$  und es gibt nach Voraussetzung eine schwache Erwartung  $E: \mathcal{L}(H_\eta) \longrightarrow A^{**}$ . - Es genügt nun zu zeigen, daß jedes Element  $\phi \in S(A \otimes B)$  eine Fortsetzung  $\hat{\phi} \in S(\mathcal{L}(H_\eta) \otimes B)$  besitzt. Sei also  $\phi \in S(A \otimes B)$  und  $T_\phi$  der durch  $\phi$  definierte vollständig positive Operator von  $A$  in  $B^*$ . Ist  $j_B: B \longrightarrow B^{**}$  die kanonische Einbettung, so ist

$$\hat{T}_\phi: \mathcal{L}(H_\eta) \xrightarrow{E} A^{**} \xrightarrow{T_\phi^{**}} B^{***} \xrightarrow{j_B^*} B^*$$

eine vollständig positive Fortsetzung von  $T_\phi$ . Die zu  $\hat{T}_\phi$  gehörige Linearform  $\hat{\phi}$  auf  $\mathcal{L}(H_\eta) \otimes B$  setzt  $\phi$  fort und ist Element von  $S(\mathcal{L}(H_\eta) \otimes B)$ . ■

KOROLLAR: Sei  $M$  eine  $W^*$ -Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a)  $M \otimes_{\max} B = M \otimes_{\min} B$  für jede  $C^*$ -Algebra  $B$ .
- b)  $M$  ist injektiv.

Beweis: a)  $\implies$  b): Sei  $\eta: M \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue, normale Darstellung von  $M$ . Dann gibt es eine schwache Erwartung  $E: \mathcal{L}(H_\eta) \longrightarrow \overline{\eta(M)} = \eta(M)$  (3.5). - Seien nun  $B_1, B$   $C^*$ -Algebren,  $B_1 \trianglelefteq B$  mit  $1_B \in B_1$  und  $T: B_1 \longrightarrow M$  ein Morphismus. Dann gibt es einen Morphismus  $S$ , der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccccc}
 B_1 & \xrightarrow{T} & M & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{L}(H_\eta) \\
 \downarrow i_{B_1} & & & \nearrow S & \\
 B & & & & 
 \end{array}$$

( $i_{B_1}$  die kanonische Einbettung von  $B_1$  in  $B$ ). Betrachte

nun  $\hat{T} := \gamma^{-1} \circ E \circ S: B \longrightarrow M$ ;  $\hat{T}$  ist ein Morphismus, der  $T$  fortsetzt.

b)  $\implies$  a): Sei  $\gamma: M \longrightarrow \mathcal{L}(H_\gamma)$  eine treue, normale Darstellung von  $M$ . Da  $M$  injektiv ist, gibt es einen Morphismus  $R: \mathcal{L}(H_\gamma) \longrightarrow M$ , der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{I_M} & M \\ \gamma \downarrow & \nearrow R & \\ \mathcal{L}(H_\gamma) & & \end{array}$$

Ist nun  $B$  eine  $C^*$ -Algebra und  $x \in M \otimes B$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\max} &= \|R \circ \gamma \otimes I_B(x)\|_{\max} \\ &= \|(R \otimes I_B)(\gamma \otimes I_B)(x)\|_{\max} \\ &\leq \|\gamma \otimes I_B(x)\|_{\max} \\ &= \|x\|_{\max}; \end{aligned}$$

daraus ergibt sich die Behauptung. ■

DEFINITION: (3.6) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra.  $A$  heißt pr-injektiv, wenn  $\pi(A)$  für jede Darstellung  $\pi$  von  $A$  injektiv ist.

Aus [15]: 5.5 ergibt sich sofort, daß eine  $C^*$ -Algebra  $A$  genau dann präinjektiv ist, wenn  $A^{**}$  injektiv ist.

THEOREM:(3.7) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a)  $A \tilde{\otimes}_{\max} B = A \otimes_{\max} B$  für jede  $C^*$ -Algebra  $B$ .
- b)  $A$  ist präinjektiv.
- c)  $A$  ist nuklear.

Beweis: a)  $\implies$  b): Sei  $\pi: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  eine Darstellung von  $A$ . Dann gilt:  $A \tilde{\otimes}_{\max} \pi(A)' = A \otimes_{\max} \pi(A)'$ ;  $A \otimes_{\max} \pi(A)'$  ist also eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $A \tilde{\otimes}_{\max} \mathcal{L}(H)$ . Sei

$\psi: A \tilde{\otimes}_{\max} \pi(A)' \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  der kanonische Homomorphismus.

Es gibt einen Hilbert-Raum  $K \supseteq H$  und einen Homomorphismus

$\hat{\psi}: A \otimes_{\max} \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(K)$  mit  $\psi(x) = p\hat{\psi}(x)|_H \quad \forall x \in A \tilde{\otimes}_{\max} \pi(A)'$

( $p$  die orthogonale Projektion von  $K$  auf  $H$ ) ([12]: 2.10.2).

Für  $x \in \mathcal{L}(H)$  setze  $E(x) := p\hat{\psi}(1 \otimes x)|_H$ . Analog zum Beweis

von 3.5 kann gezeigt werden, daß  $E$  ein Morphismus ist,

mit  $E(x) \in \pi(A)' \quad \forall x \in \mathcal{L}(H)$ . Wie im Beweis von 3.5,

Kor. folgt nun, daß  $\pi(A)'$  injektiv ist. Dann ist aber

auch  $\overline{\pi(A)}$  injektiv ([15]: 5.1).

b)  $\implies$  a): Sei  $B$  eine  $C^*$ -Algebra. Es ist zu zeigen:  
 Zu jedem Element  $\phi \in S(A \otimes B)$  gibt es ein  $\hat{\phi} \in S(A \otimes \mathcal{L}(H_\Sigma))$ ,  
 das  $\phi$  fortsetzt ( $\zeta: B \longrightarrow \mathcal{L}(H_\Sigma)$  eine treue Darstellung  
 von  $B$ ). Sei also  $\phi \in S(A \otimes B)$  und  $T_\phi: B \longrightarrow A^*$  der durch  
 $\phi$  definierte vollständig positive Operator von  $B$  in  
 $A^*$ . Sei  $\varphi := T_\phi(1)$ ; da  $\phi \in S(A \otimes B)$ , ist  $\varphi$  ein Zustand  
 auf  $B$ . Es gilt:  $T_\phi(B) \subseteq [\varphi]$ , da  $T_\phi$  (vollständig) positiv  
 ist. Betrachte nun den Morphismus

$$B \xrightarrow{T_\phi} [\varphi] \xrightarrow{\theta_\varphi^{-1}} \pi_\varphi(A)';$$

Da  $\overline{\pi_\varphi(A)}$  injektiv ist, ist auch  $\pi_\varphi(A)'$  injektiv ([15]:  
 5.1). Folglich gibt es einen Morphismus  $S$ , der das  
 folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{T_\phi} & [\varphi] \xrightarrow{\theta_\varphi^{-1}} \pi_\varphi(A)' \\ \zeta \downarrow & & \nearrow S \\ \mathcal{L}(H_\Sigma) & & \end{array}$$

Sei nun  $\hat{T}_\phi := \theta_\varphi \circ S: \mathcal{L}(H_\Sigma) \longrightarrow A^*$  und  $\hat{\phi}$  die zu  $\hat{T}_\phi$  ge-  
 hörige Linearform auf  $A \otimes \mathcal{L}(H_\Sigma)$ . Es ist  $\hat{\phi} \in S(A \otimes \mathcal{L}(H_\Sigma))$   
 und  $\hat{\phi}$  setzt  $\phi$  fort.

b)  $\iff$  c): [8]; [10]. ■

Als operatorentheoretische Anwendung kann nun der  
 folgende Zusammenhang bewiesen werden:

THEOREM: (3.8) Sei  $M$  eine  $\sigma$ -endliche  $W^*$ -Algebra mit einem treuen, normalen Zustand  $\psi$ ,  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T: A \longrightarrow M$  ein Morphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a)  $\phi^\psi(T)$  ist stetig auf  ${}_K A \otimes_{\max} M$ .

b)  $T$  ist fortsetzbar, d.h. ist  $A$  eine  $C^*$ -Unteralgebra der  $C^*$ -Algebra  $B$  mit  $1_B \in A$ , so gibt es einen Morphismus  $\hat{T}: B \longrightarrow M$ , der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{T} & M \\ i_A \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ B & & \end{array}$$

(dabei ist  $i_A$  die kanonische Einbettung von  $A$  in  $B$ ).

Beweis: a)  $\implies$  b): Sei  $\phi := \phi^\psi(T)$  stetig auf  ${}_K A \otimes_{\max} M$ . Dann ist  $\phi \geq 0$  und  $\phi(1 \otimes 1) = \langle j_\psi T(1), 1 \rangle = \langle j_\psi(1), 1 \rangle = \psi(1) = 1$ .  $\phi$  kann also in eindeutiger Weise zu einem Zustand von  ${}_K A \otimes_{\max} M$  fortgesetzt werden, der ebenfalls mit  $\phi$  bezeichnet werde. Sei  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $A$ . Dann bestimmt  $\eta$  in kanonischer Weise eine treue Darstellung  $\tilde{\eta}$  von  ${}_K A$  auf  $\mathcal{L}(\bar{H}_\eta) \cong_K \mathcal{L}(H_\eta)$ .  ${}_K A \otimes_{\max} M$  ist eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $\mathcal{L}(\bar{H}_\eta) \otimes_{\max} M$ .  $\phi$  kann also zu einem Zustand  $\hat{\phi}$  von  $\mathcal{L}(\bar{H}_\eta) \otimes_{\max} M$  fortgesetzt werden ([12]: 2.10.1). Sei  $S$  der zu  $\hat{\phi}$  gehörige vollständig

positive Operator von  $\mathcal{L}(\bar{H}_\eta)$  in  $M^*$ . Dann kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{j_\eta^* T} & M^* \\ \eta \downarrow & \nearrow S & \\ \mathcal{L}(\bar{H}_\eta) & & \end{array}$$

Es gilt also  $S(1) = \psi$ ; damit ist aber  $S(\mathcal{L}(\bar{H}_\eta)) \subseteq [\psi]$ .

Es gibt also einen Morphismus

$$\hat{T}: \mathcal{L}(H_\eta) \longrightarrow \mathcal{L}(\bar{H}_\eta) \xrightarrow{S} [\psi] \xrightarrow{j_\eta^{-A}} M,$$

der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{T} & M \\ \eta \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ \mathcal{L}(H_\eta) & & \end{array}$$

kommutativ macht. - Da  $\mathcal{L}(H_\eta)$  injektiv ist, folgt, daß  $T$  fortsetzbar ist.

b)  $\implies$  a): Sei  $T \in \mathcal{L}(A, M)$  ein fortsetzbarer Morphismus und  $\eta: A \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta)$  eine treue Darstellung von  $A$ . Dann gibt es einen Morphismus  $\hat{T}: \mathcal{L}(H_\eta) \longrightarrow M$ , der  $T$  fortsetzt. Es gibt einen vollständig positiven Operator

$$S: \mathcal{L}(\bar{H}_\eta) \longrightarrow \mathcal{L}(H_\eta) \xrightarrow{j_\eta^* \hat{T}} M_*,$$

der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 k^A & \xrightarrow{j_{\psi^T}} & M_* \\
 \bar{\eta} \downarrow & \nearrow S & \\
 \mathcal{L}(\bar{H}_{\eta}) & & 
 \end{array}$$

kommutativ macht. D.h. aber  $\phi := \phi^{\psi}(T) \in \mathcal{Y}_{(k^A/\max \tilde{\otimes} M)}$ . ■

#### 4. DER ABSOLUTBETRAG VON OPERATOREN $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$

Im Zentrum dieses Abschnittes steht die Analyse des Operators  $|T_z| := \sqrt[t]{\min}(|z|)$  ( $z \in {}_{K_n}M_n \otimes_{\min} A$ ). Durch den Beweis von Ungleichungen soll die Betragseigenart von  $|T_z|$  herausgearbeitet werden.

Zunächst wird die min-nukleare Norm von  $T_z$  ( $z \in {}_{K_n}M_n \otimes_{\min} A$ ) nach dem Vorbild der Grothendieckschen Theorie definiert (4.1). Die in 4.3 entwickelte Stinespring-Zerlegung des Operators  $T_z$  ist die Grundlage für den Beweis der Ungleichung:

$$T_z^{(m)}(x)^* T_z^{(m)}(x) \leq \|T_z\|_{\min} |T_z|^{(m)}(x^*x)$$

$\forall x \in M_m(M_n)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  (4.3, Kor.1). Daraus ergibt sich sofort:  $\|T_z\|_{\infty} \leq \|T_z\|_{\min}$  (4.3, Kor.2). Ist  $T$  selbstadjungiert, so gilt:

$$T_z^{(m)}(x)^* T_z^{(m)}(x) \leq \|T_z\| \|T_z|^{(m)}(x^*x)$$

$\forall x \in M_m(M_n)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  (4.5) und  $\|T_z\|_{\infty} \leq \|T_z\|$  (4.5, Kor.). Wie im skalaren Fall gilt:

$$||T_y + T_z|^{(m)}(x)|^2 \leq (\|T_y\|_{\min} + \|T_z\|_{\min}) (|T_y|^{(m)}(x^*x) + |T_z|^{(m)}(x^*x))$$

$\forall y, z \in {}_{k^{min}}M_n \otimes A, \forall x \in M_m(M_n), \forall m, n \in \mathbb{N}$  (4.6). - Nach R.I. Loeb1 ([21]) wird die totale Variation  $V(T)$  eines Operators  $T$  zwischen  $C^*$ -Algebren definiert (4.7). In 4.9 wird gezeigt, daß  $\|T_Z\| \leq V(T^{(n)})$  für  $n=2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$ ).

Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$ . Dann gibt es genau ein  $z \in {}_{k^{min}}M_n \otimes A$  mit

$$T = T_Z := \vee_{\min}^t(z);$$

es ist  $z = n \sum_{ij} e_{ij} \otimes T(e_{ij})$  (2.4; 2.8.3). - Ist nun  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $z \in {}_{k^{min}}M_n \otimes A$ ), so setze

$$|T_Z| := T_{|z|}.$$

DEFINITION:(4.1) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $z \in {}_{k^{min}}M_n \otimes A, n \in \mathbb{N}$ ). Dann setze  $\|T_Z\|_{\min} := \|z\|_{\min} \cdot \|T_Z\|_{\min}$  heißt die min-nukleare Norm von  $T_Z$ .

LEMMA:(4.2) Seien  $x, y, z \in M_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:

$$\langle j_t(xy), z \rangle = \langle j_t(y), x^*z \rangle = \langle j_t(x), zy^* \rangle.$$

$$\underline{\text{Beweis:}} \quad \langle j_t(xy), z \rangle = (J\pi_t(xy)J\pi_t(z)\xi_t | \xi_t)$$

$$= (J\pi_t(x)JJ\pi_t(y)J\pi_t(z)\xi_t | \xi_t)$$

$$= (J\pi_t(y)J\pi_t(z)\xi_t | J\pi_t(x^*)J\xi_t)$$

$$= (J\pi_t(y)J\pi_t(z)\xi_t | \pi_t(x)\xi_t)$$

$$= (\pi_t(x^*)J\pi_t(y)J\pi_t(z)\xi_t | \xi_t)$$

$$= (J\pi_t(y)J\pi_t(x^*z)\xi_t | \xi_t)$$

$$= \langle j_t(y), x^*z \rangle.$$

$$\langle j_t(x), zy^* \rangle = (J\pi_t(x)J\pi_t(zy^*)\xi_t | \xi_t)$$

$$= (J\pi_t(x)J\pi_t(z)J\pi_t(y)J\xi_t | \xi_t)$$

$$= (J\pi_t(xy)J\pi_t(z)\xi_t | \xi_t)$$

$$= \langle j_t(xy), z \rangle.$$

THEOREM:(4.3) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\varrho:A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  eine treue Darstellung von  $A$  ( $H$  ein Hilbert-Raum) und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $z \in {}_K M_n \otimes_{\min} A$ ). Dann gibt es eine Darstellung  $\{\pi, K\}$  von  $M_n$  und Operatoren  $V, W \in \mathcal{L}(H, K)$  mit

$$\begin{aligned} \varrho(T_Z(x)) &= W^* \pi(x) V & \forall x \in M_n \\ \|V\|, \|W\| &\leq \|T_Z\|_{\min}^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis:  $|T_Z| \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ist vollständig positiv. Sei  $\{\pi, K, V\}$  das Tripel der Stinespring-Zerlegung von  $\varrho|T_Z|$ . Es ist zunächst für  $\xi \in H$ :

$$\begin{aligned} \|V\xi\|^2 &= \langle 1 \otimes \xi | 1 \otimes \xi \rangle = (\varrho(|T_Z|)(1))\xi | \xi \\ &\leq \| |T_Z| \| \| \xi \|^2 \\ &\leq \|T_Z\|_{\min} \| \xi \|^2 \quad (\text{vgl. 2.2, Kor.3}), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \|V\| \leq \|T_Z\|_{\min}^{1/2}.$$

Sei  $\tilde{\varrho}$  die Fortsetzung der Darstellung  $\varrho$  auf  $A^{**}$  und  $u := \sum_{ij} e_{ij} \otimes u_{ij} \in {}_K M_n \otimes A^{**}$  die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $z$ ;  $z = u|z|$ . Setze nun für  $\xi \in H$ :

$$W\xi := \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\varrho}(u_{ij}^*)\xi + W.$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned}
 \|W\xi\|^2 &= (W\xi|W\xi) \\
 &= \langle \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\xi}(u_{ij}^*) \xi | \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\xi}(u_{ij}^*) \xi \rangle \\
 &= \sum_{ij,kl} (\tilde{\xi}(|T_Z|(e_{1k}e_{ij})u_{ij}^*)\xi | \tilde{\xi}(u_{kl}^*)\xi) \\
 &= \sum_{ij,kl} (\tilde{\xi}(|T_Z|(e_{1j})u_{ij}^*)\xi | \tilde{\xi}(u_{kl}^*)\xi) \\
 &= \sum_{ij,kl} (\tilde{\xi}(u_{il}|T_Z|(e_{1j})u_{ij}^*)\xi | \xi) \\
 &= \sum_{ij} (\tilde{\xi}(\sum_l u_{il}|T_Z|(e_{1j}))\tilde{\xi}(u_{ij}^*)\xi | \xi) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{ij} (\tilde{\xi}(z_{ij}u_{ij}^*)\xi | \xi) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_i (\tilde{\xi}(\sum_j z_{ij}u_{ij}^*)\xi | \xi) \\
 &= \langle zu^*, \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{\xi,\xi} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{\xi,\xi} \end{pmatrix} \rangle \\
 \leq \|z\|_{\min} &= \|T_Z\|_{\min};
 \end{aligned}$$

also ist  $\|W\| \leq \|T_Z\|_{\min}^{1/2}$ .

Schließlich ist für  $x \in M_n$ ,  $\xi, \eta \in H$ :

$$(W^* \pi(x) V \xi | \eta) = (\pi(x) V \xi | W \eta)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi(x)(1 \otimes \xi)) | \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\xi}(u_{ij}^*) \eta \rangle \\
 &= \sum_{ij} \langle x \otimes \xi | e_{ij} \otimes \tilde{\xi}(u_{ij}^*) \eta \rangle \\
 &= \sum_{ij} (\tilde{\xi}(|T_Z| (e_{ji} x))) \xi | \tilde{\xi}(u_{ij}^*) \eta \rangle \\
 &= \sum_{ij} (\tilde{\xi}(u_{ij} | T_Z | (e_{ji} x))) \xi | \eta \rangle \\
 &= \sum_{ij} \langle L_{u_{ij}} \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\xi}}, |T_Z| (e_{ji} x) \rangle \\
 &= \sum_{ij} \langle \overline{j_t(e_{ji} x)} \otimes L_{u_{ij}} \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\xi}}, |z| \rangle \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{ij} \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\xi}}, e_{ij} \otimes u_{ij} | z| \rangle \\
 &= \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\xi}}, u | z| \rangle \\
 &= \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\xi}}, z \rangle \\
 &= (\mathcal{G}(T_Z(x)) \xi | \eta),
 \end{aligned}$$

d.h.  $W^* \pi(x) V = \mathcal{G}(T_Z(x)).$

KOROLLAR 1:  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(M_n):$

$$T_Z^{(m)}(x)^* T_Z^{(m)}(x) \leq \|T_Z\|_{\min} |T_Z|^{(m)}(x^* x).$$

KOROLLAR 2:  $\|T_Z\|_\infty \leq \|T_Z\|_{\min}$ .

Beweis: Sei  $x \in M_m(M_n)$  und  $\|x\| \leq 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|T_Z^{(m)}(x)\|^2 &= \|T_Z^{(m)}(x)^* T_Z^{(m)}(x)\| \\ &\leq \|T_Z\|_{\min} \| |T_Z|^{(m)}(1) \| \\ &\leq \|T_Z\|_{\min}^2. \end{aligned}$$

LEMMA: (4.4) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $z \in {}_k M_n \otimes_{\min} A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\forall \varphi \in A^*$ :

$$\langle |T_Z|(1), \varphi \rangle = \langle [T_Z(e_{ij})], \begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix} \rangle.$$

Beweis: Sei  $\varphi \in A^*$ . Dann ist für  $|z| =: \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{z}_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \langle |T_Z|(1), \varphi \rangle &= \langle T_{|z|}(1), \varphi \rangle \\ &= \langle j_t(\overline{1}) \otimes \varphi, |z| \rangle \\ &= \langle j_t(\overline{1}) \otimes \varphi, \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{z}_{ij} \rangle \\ &= \sum_{ij} {}^t(e_{ij}) \langle \tilde{z}_{ij}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle [\tilde{z}_{ij}], \varphi_n \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{pmatrix} \rangle \\
 &= \langle |[T_Z(e_{ij})]|, \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{pmatrix} \rangle.
 \end{aligned}$$

■

PROPOSITION: (4.5) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  selbstadjungiert ( $z \in ({}_k M_n \otimes_{\min} A)_s$ ). Dann gilt  
 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(M_n)$ :

$$T_Z^{(m)}(x)^* T_Z^{(m)}(x) \leq \| |T_Z| \| |T_Z|^{(m)}(x^* x).$$

Beweis: Nach 4.3 gilt:  $\mathfrak{S}(T_Z(x)) = W^* \pi(x) V$  ( $\mathfrak{S}: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ ) eine treue Darstellung von  $A$ ,  $W, V \in \mathcal{L}(H, K)$ ,  $\{\pi, K\}$  eine Darstellung von  $M_n$ . Dabei ist  $V$  der Operator des Tripels der Stinespring-Zerlegung von  $\mathfrak{S}|T_Z|$ . Es ist zu zeigen:  $\|W\|^2 \leq \| |T_Z| \|$ . Sei  $\xi \in H$ . Wie in 4.3 ergibt sich

$$\|W\xi\|^2 = \langle zu^*, \varphi_n \begin{pmatrix} \tilde{z} & & 0 \\ \omega_{\xi, \xi} & \ddots & \\ 0 & & \omega_{\xi, \xi} \end{pmatrix} \rangle;$$

Weil  $z$  selbstadjungiert ist, folgt  $zu^* = zu = |z|$ .  
 Folglich ist

$$\|W\xi\|^2 = \langle |[T_Z(e_{ij})]|, \begin{pmatrix} \tilde{z} & & 0 \\ \omega_{\xi, \xi} & \ddots & \\ 0 & & \omega_{\xi, \xi} \end{pmatrix} \rangle$$

$$(4.4) \quad = \langle |T_Z|(\eta), w_{\xi, \xi}^{\eta} \rangle \leq \| |T_Z| \| \| \xi \|^2.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

KOROLLAR: Sei  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  selbstadjungiert. Dann gilt:  $\|T_Z\|_{\infty} \leq \| |T_Z| \|$ .

THEOREM: (4.6) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T_Y, T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $y, z \in {}_k M_n \otimes_{\min} A, n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(M_n)$ :

$$| |T_Y + T_Z|^{(m)}(x) |^2 \leq (\|T_Y\|_{\min} + \|T_Z\|_{\min}) (|T_Y|^{(m)}(x^*x) + |T_Z|^{(m)}(x^*x))$$

Beweis: Sei  $\mathfrak{g}: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  eine treue Darstellung von  $A$  ( $H$  ein Hilbert-Raum),  $\tilde{\mathfrak{g}}$  die Fortsetzung von  $\mathfrak{g}$  auf  $A^{**}$  und  $\{\pi_1, H_1, V_1\}$  bzw.  $\{\pi_2, H_2, V_2\}$  das Tripel der Stinespring-Zerlegung von  $\mathfrak{g}|T_Y|$  bzw.  $\mathfrak{g}|T_Z|$ .

Betrachte  $K := H_1 \oplus H_2$ . Sei  $V: H \longrightarrow K$  definiert durch  $V\xi := (V_1\xi, V_2\xi)$  und  $\pi := \pi_1 \oplus \pi_2$ . Dann gilt für  $\xi, \eta \in H, x \in M_n$ :

$$(V^* \pi(x) V \xi | \eta) = (\pi(x) V \xi | V \eta)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi(x)(V_1\xi, V_2\xi) | (V_1\eta, V_2\eta)) \\
 &= ((\pi_1(x)V_1\xi, \pi_2(x)V_2\xi) | (V_1\eta, V_2\eta)) \\
 &= (V_1^*\pi_1(x)V_1\xi | \eta) + (V_2^*\pi_2(x)V_2\xi | \eta) \\
 &= (\mathfrak{F}(|T_y|(x))\xi | \eta) + (\mathfrak{F}(|T_z|(x))\xi | \eta);
 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } V^*\pi(x)V = \mathfrak{F}((|T_y| + |T_z|)(x)).$$

Sei  $u := \sum_{ij} e_{ij} \otimes u_{ij}$ ,  $v := \sum_{ij} e_{ij} \otimes v_{ij}$  bzw.  $w := \sum_{ij} e_{ij} \otimes w_{ij}$  die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $y, z$  bzw.  $y+z$  in  ${}_k M_n \otimes A^{**}$ ;  $y = |u|y$ ,  $z = |v|z$ ,  $|y+z| = w^*(y+z)$ .  $W:H \longrightarrow K$  sei definiert durch

$$W\xi := (\sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k u_{kj}^* w_{ki})\xi + \mathcal{W}_1, \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k v_{kj}^* w_{ki})\xi + \mathcal{W}_2)$$

( $\xi \in H$ ). Dann ist

$$\|W\xi\|^2 = (W\xi | W\xi)$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k u_{kj}^* w_{ki})\xi | \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k u_{kj}^* w_{ki})\xi \rangle \\
 &\quad + \langle \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k v_{kj}^* w_{ki})\xi | \sum_{ij} e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(\sum_k v_{kj}^* w_{ki})\xi \rangle \\
 &= \sum_{i,j,k,i',j',k'} \langle e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(u_{kj}^* w_{ki})\xi | e_{i'j'} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(u_{kj'}^* w_{ki'})\xi \rangle \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,i',j',k'} \langle e_{ij} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(v_{kj}^* w_{ki})\xi | e_{i'j'} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}(v_{kj'}^* w_{ki'})\xi \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{ij,k,i',j',k'} (\tilde{\zeta}(|T_Y| (e_{ji'} e_{ij}) u_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\zeta}(u_{kj}^* w_{ki}') \tilde{\xi}) \\
 &\quad + \sum_{ij,k,i',j',k'} (\tilde{\zeta}(|T_Z| (e_{ji'} e_{ij}) v_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\zeta}(v_{kj}^* w_{ki}') \tilde{\xi}) \\
 &= \sum_{ij,k,i',j',k'} (\tilde{\zeta}(w_{ki}^* u_{kj}' | T_Y| (e_{ji'}) u_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &\quad + \sum_{ij,k,i',j',k'} (\tilde{\zeta}(w_{ki}^* v_{kj}' | T_Z| (e_{ji'}) v_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &= \sum_{ij,k,k'} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}(w_{ki}^* y_{kj}' u_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &\quad + \sum_{ij,k,k'} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}(w_{ki}^* z_{kj}' v_{kj}^* w_{ki}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &= \sum_{ij,k} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}((\sum_{k'} w_{ki}^* y_{kj}') (w_{ki}^* u_{kj})^*) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &\quad + \sum_{ij,k} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}((\sum_{k'} w_{ki}^* z_{kj}') (w_{ki}^* v_{kj})^*) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &= \sum_{ij} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}([w^* y]_{ij} ([w^* u]^*)_{ij}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &\quad + \sum_{ij} \mathcal{U}(\tilde{\zeta}([w^* z]_{ij} ([w^* v]^*)_{ij}) \tilde{\xi} | \tilde{\xi}) \\
 &= \langle w^* y u^* w, \mathcal{U} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\omega}_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}} \end{pmatrix} \rangle + \langle w^* z v^* w, \mathcal{U} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\omega}_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}} \end{pmatrix} \rangle \\
 &\leq \|y\|_{\min} \|\tilde{\xi}\|^2 + \|z\|_{\min} \|\tilde{\xi}\|^2 \\
 &= (\|T_Y\|_{\min} + \|T_Z\|_{\min}) \|\tilde{\xi}\|^2, \\
 &\text{d.h. } \|w\| \leq (\|T_Y\|_{\min} + \|T_Z\|_{\min})^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Weiter ist für  $\xi, \eta \in H$ ,  $x \in M_n$ :

$$\begin{aligned}
 (w^* \pi(x) V \xi | \eta) &= (\pi(x) V \xi | w \eta) \\
 &= (\pi(x) (V_1 \xi, V_2 \xi) | w \eta) \\
 &= \sum_{i,j,k} (\tilde{\xi} (w_{ki}^* u_{kj} | T_y | (e_{ji} x)) \xi | \eta) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} (\tilde{\xi} (w_{ki}^* v_{kj} | T_z | (e_{ji} x)) \xi | \eta) \\
 &= \sum_{i,j,k} \langle \overline{j_t(e_{ji} x)} \otimes L_{w_{ki}^* u_{kj}} \tilde{\omega}_{\xi, \eta}, |y| \rangle \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} \langle \overline{j_t(e_{ji} x)} \otimes L_{w_{ki}^* v_{kj}} \tilde{\omega}_{\xi, \eta}, |z| \rangle \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\omega}}, w^* u | y \rangle + \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\omega}}, w^* v | z \rangle \\
 &= \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\omega}}, w^* (y+z) \rangle = \langle \overline{j_t(x)} \otimes \omega_{\xi, \eta}^{\tilde{\omega}}, |y+z| \rangle \\
 &= (\tilde{\xi} (|T_y + T_z| (x)) \xi | \eta).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

DEFINITION: (4.7) Seien  $A, B$   $C^*$ -Algebren und  $T \in \mathcal{L}(A, B)$ .

Dann sei

$$V(T) := \sup \left\{ \left\| \sum_i |T(x_i)| \right\| : 0 \leq x_i \in A, \sum_i x_i \leq 1 \right\}.$$

$V(T)$  heißt die totale Variation von  $T$ .  $T$  heißt von beschränkter totaler Variation, wenn  $V(T) < \infty$ .

Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(M_n, A)$ . Weil  $T^{(m)}$  nuklear ist (im klassischen Sinne)  $\forall m \in \mathbb{N}$ , folgt  $V(T^{(m)}) < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$  ([21]: 3.2). Im folgenden soll eine Abschätzung für die Operatornorm von  $|T_Z|$  ( $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$ ) im Zusammenhang mit der totalen Variation von  $T^{(n)}$  entwickelt werden.

LEMMA: (4.8) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra,  $n=2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n A)$ . Dann gibt es  $n^2$  paarweise orthogonale Projektionen  $p_{ij} \in M_n(M_n)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) mit

$$\langle |T_Z^{(n)}([e_{ij}])|, \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{pmatrix} \rangle = \langle \sum_{ij} |T_Z^{(n)}(p_{ij})|, \frac{1}{n} \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{pmatrix} \rangle$$

$$\forall e \in \mathcal{J}(A).$$

Beweis: Sei zunächst  $k=1$  und

$$\begin{aligned} p_{11} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} & p_{12} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_{11} & -e_{12} \\ -e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \\ p_{21} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_{22} & -e_{21} \\ -e_{12} & e_{11} \end{pmatrix} & p_{22} &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_{22} & e_{21} \\ e_{12} & e_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dadurch sind vier paarweise orthogonale Projektionen aus  $M_2(M_2)$  gegeben. Sei weiterhin

$$\begin{aligned} u_{11} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & u_{12} &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ u_{21} &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & u_{22} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

$u_{ij} \in M_2(A)$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) ist unitär. Sei nun  $[v_{ij}] \in M_2(A^{**})$  die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $T_Z^{(2)}([e_{ij}])$ ;  $|T_Z^{(2)}([e_{ij}])| = [v_{ij}]^* T_Z^{(2)}([e_{ij}])$ .  
Damit gilt:

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i,j=1}^2 |T_Z^{(2)}(p_{ij})|, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^2 |u_{ij}^* T_Z^{(2)}(p_{11}) u_{ij}|, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^2 u_{ij}^* |T_Z^{(2)}(p_{11})| u_{ij}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^2 u_{ij}^* [v_{ij}]^* T_Z^{(2)}(p_{11}) u_{ij}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} u_{ij}^* [v_{ij}]^* T_Z^{(2)}([e_{ij}]) u_{ij}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) & * \\ * & \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) & * \\ * & \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) & * \\ * & \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) & * \\ * & \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) \end{pmatrix} \right\rangle , \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) + \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) & * \\ * & \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) + \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \langle \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) + \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}), \varphi \rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_k v_{k1}^* T_2(e_{k1}) & * \\ * & \sum_k v_{k2}^* T_2(e_{k2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \langle |T_Z^{(2)}([e_{ij}])|, \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} \rangle.
 \end{aligned}$$

Sei nun  $k=2$ . Der Beweis kann dann völlig analog geführt werden, wenn die Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_{13} & e_{14} \\ e_{23} & e_{24} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_{33} & e_{34} \\ e_{43} & e_{44} \end{pmatrix}$$

von  $[e_{ij}]$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ) studiert werden. - Induktiv folgt die Behauptung. ■

THEOREM:(4.9) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T_Z \in \mathcal{L}(M_n, A)$  ( $z \in {}_{K^n} M_n \otimes A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Ist  $n=2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), so gilt:

$$\| |T_Z| \| \leq v(T_Z^{(n)}).$$

Beweis: Sei  $\varphi \in \mathcal{H}(A)$ . Dann ist:

$$\underset{(4.4)}{\langle |T_Z|(\mathbb{1}), \varphi \rangle} = \langle |T_Z^{(n)}([e_{ij}])|, \begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix} \rangle$$

$$\underset{(4.8)}{=} \langle \sum_{i,j} |T_Z^{(n)}(p_{ij})|, \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix} \rangle$$

$$\leq V(T_Z^{(n)}).$$

# 5. ABSOLUTBETRAG UND JORDAN-ZERLEGUNG VON OPERATOREN $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften der in 5.3 eingeführten Operatoren  $|T|$ ,  $T^+$ ,  $T^-$  untersucht ( $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ ). Zunächst wird gezeigt, daß für jeden Operator  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  die Linearform  $\phi^t(T)$  stetig ist auf  ${}_k A \otimes_{\min} M_n$  mit der Norm  $\|T^{(n)}\|$  (5.2). Interessant ist, daß dieses Resultat im Kontext des von R.R.Smith und J.D.Ward vorgestellten Konzeptes ([28]) gewonnen werden kann. In 5.4 wird die min-Norm  $\min(T)$  von  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  definiert. Sie ist so gewählt, daß  $\|T\|_\infty \leq \min(T)$ . Diese Forderung erscheint im Zusammenhang der Operatoren zwischen  $C^*$ -Algebren, abweichend von Grothendiecks Konzept ( $\|T\| \leq \alpha(T)$ ,  $\alpha$  eine Tensornorm), sinnvoll. Weil  $|T|$  ( $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ ) im Rückgriff auf die skalare Theorie definiert wurde, gelingt es, den Darstellungssatz 5.5 für  $T$  zu beweisen, der auf den spezifischen Zusammenhängen von  $\phi^t(T)$  und  $|\phi^t(T)|$  basiert. Daraufhin ergibt sich:

$$T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x) \leq \min(T) |T|^{(m)}(x^* x)$$

$\forall x \in M_m(A)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  (5.5, Kor.1). Ist  $T$  selbstadjungiert, so folgt:

$$T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x) = \| |T| \| |T|^{(m)}(x^* x) \quad (5.6).$$

Die Normen  $\min(\cdot)$  und  $\|\cdot\|_\infty$  sind äquivalent auf  $\mathcal{L}(A, M_n)$  (5.5, Kor.3). Analog zum skalaren Fall ergibt sich für  $T, S \in \mathcal{L}(A, M_n)$

$$| |T+S|^{(m)}(x) |^2 \leq (\min(T) + \min(S)) (|T|^{(m)}(x^*x) + |S|^{(m)}(x^*x))$$

$\forall x \in M_m(A), \forall m \in \mathbb{N}$ . (5.7). Gilt  $T_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  ( $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Operatoren in  $\mathcal{L}(A, M_n)$ ), so folgt  $|T_m| \xrightarrow{\|\cdot\|} |T|$  (5.8). Auch diese Beziehung orientiert sich am skalaren Vorbild.

Die Zerlegung  $T = T^+ - T^-$  ( $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  selbstadjungiert) ist durch die Forderungen:

$$T^+, T^- \text{ vollständig positiv, } T = T^+ - T^-$$

$$\min(T) = \min(T^+) + \min(T^-)$$

eindeutig charakterisiert (5.10).

In 5.11 schließlich wird ein Radon-Nikodym-Satz für vollständig positive Operatoren in  $\mathcal{L}(A, M_n)$  bewiesen.

LEMMA:(5.1) Seien  $y_{ij} \in M_n$ ,  $e_{ij}$  die Matrizen der kanonischen Basis von  $M_n$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ),  $\xi_1, \dots, \xi_n$  die Vektoren der kanonischen Basis von  $\mathbb{C}^n$  und  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n t(e_{ij} y_{ij}^*) &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \overline{(y_{ij} \xi_j | \xi_i)} \\ &= \frac{1}{n} \omega_{\xi, \xi}([y_{ij}]). \end{aligned}$$

Beweis: Sei  $y_{ij}^* := [\lambda_{kl}^{(ij)}] \in M_n$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Dann ist

$$\begin{aligned} n \cdot \sum_{i,j=1}^n t(e_{ij} y_{ij}^*) &= \\ &\lambda_{11}^{(4,1)} + \lambda_{21}^{(4,2)} + \lambda_{31}^{(4,3)} + \dots + \lambda_{n1}^{(4,n)} \\ &+ \lambda_{12}^{(2,1)} + \lambda_{22}^{(2,2)} + \lambda_{32}^{(2,3)} + \dots + \lambda_{n2}^{(2,n)} \\ &\vdots \\ &+ \lambda_{1n}^{(n,1)} + \lambda_{2n}^{(n,2)} + \lambda_{3n}^{(n,3)} + \dots + \lambda_{nn}^{(n,n)} \\ &= \\ &(y_{11}^* \xi_1 | \xi_1) + (y_{12}^* \xi_1 | \xi_2) + \dots + (y_{1n}^* \xi_1 | \xi_n) \\ &+ (y_{21}^* \xi_2 | \xi_1) + (y_{22}^* \xi_2 | \xi_2) + \dots + (y_{2n}^* \xi_2 | \xi_n) \\ &\vdots \\ &+ (y_{n1}^* \xi_n | \xi_1) + (y_{n2}^* \xi_n | \xi_2) + \dots + (y_{nn}^* \xi_n | \xi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n (y_{i1}^* \xi_i | \xi_1) + \sum_{i=1}^n (y_{i2}^* \xi_i | \xi_2) + \dots + \sum_{i=1}^n (y_{in}^* \xi_i | \xi_n) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (y_{ij}^* \xi_i | \xi_j) = \sum_{i,j=1}^n \overline{(y_{ij} \xi_j | \xi_i)} \\
 &= \overline{\omega_{\xi, \xi}([y_{ij}])}.
 \end{aligned}$$

PROPOSITION: (5.2) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ .

Dann ist  $\phi^t(T)$  eine stetige Linearform auf  ${}_K A \otimes_{\min} M_n$  mit der Norm  $\leq \|T^{(n)}\|$ .

Beweis: Sei  $x := \sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij} \in {}_K A \otimes_{\min} M_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 |\phi^t(T)(\sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij})| &= |\sum_{i,j} \langle j, t^T(x_{ij}), e_{ij} \rangle| \\
 &= |\sum_{i,j} t(e_{ij} T(x_{ij})^*)| \\
 &= \|\omega_{\xi, \xi}([T(x_{ij})])\| \\
 &\leq \| [T(x_{ij})] \| \|\xi\|^2 \\
 &\leq \|T^{(n)}\| \| [x_{ij}] \| \\
 &= \|T^{(n)}\| \|\sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij}\|_{\min}.
 \end{aligned}$$

PROPOSITION:(5.3) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ . Dann gibt es genau einen vollständig positiven Operator  $|T| \in \mathcal{L}(A, M_n)$  mit  $\phi^t(|T|) = |\phi^t(T)|$ . Ist  $T$  selbstadjungiert, so gibt es eindeutig bestimmte vollständig positive Operatoren  $T^+, T^- \in \mathcal{L}(A, M_n)$  mit  $\phi^t(T^+) = \phi^t(T)^+$ ,  $\phi^t(T^-) = \phi^t(T)^-$ .

Beweis:  $\phi := \phi^t(T) \in ({}_K A \otimes_{\min} M_n)^*$ . Also existiert  $|\phi|$ . Betrachte den Operator  $T_{|\phi|} : {}_K A \longrightarrow M_n^*$  mit  $\langle T_{|\phi|}(x), y \rangle = |\phi|(x \otimes y)$  ( $x \in {}_K A$ ,  $y \in M_n$ ).  $T_{|\phi|}$  ist vollständig positiv. Setze  $|T| := j_t^{-1} T_{|\phi|}$ . - Analog wird der zweite Teil der Behauptung bewiesen. ■

DEFINITION:(5.4) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\phi := \phi^t(T)$ . Dann setze  $\min(T) := n \cdot \|\phi\|$ .  $\min(T)$  heißt die min-Norm von  $T$ .

THEOREM:(5.5) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ . Dann gibt es eine Darstellung  $\{\pi, K\}$  von  $A$  und Operatoren  $V, W \in \mathcal{L}(H_t, K)$  mit

$$\begin{aligned} \pi_t(T(x)) &= W^* \pi(x) V & \forall x \in A, \\ \|W\|, \|V\| &\leq \min(T)^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei  $\phi := \phi^\dagger(T)$ ,  $K := \overline{H_{|\phi|}}$  und  $V_1: H_t \longrightarrow \overline{H_{|\phi|}}$  definiert durch  $V_1(\pi_t(y)\xi_t) := \pi_{|\phi|}(\mathbb{1} \otimes y)\xi_{|\phi|} \in \overline{H_{|\phi|}}$  ( $y \in M_n$ ); es ist dann

$$\begin{aligned} \|V_1(\pi_t(y)\xi_t)\|^2 &= \|\pi_{|\phi|}(\mathbb{1} \otimes y)\xi_{|\phi|}\|^2 \\ &= |\phi|(\mathbb{1} \otimes y^*y) \\ &\leq \| |\phi| \| \|y^*y\| \\ &\leq \|\phi\| \langle \text{tr}, y^*y \rangle \\ &= n \cdot \|\phi\| \langle t, y^*y \rangle \\ &= \min(T) \|\pi_t(y)\xi_t\|^2, \end{aligned}$$

d.h.  $\|V_1\| \leq \min(T)^{1/2}$ . Setze  $V := V_1 J$ .

Sei  $u := \sum_{ij} u_{ij} \otimes e_{ij} \in {}_K A_{\min}^{**} \otimes M_n$  die partielle Isometrie der polaren Zerlegung von  $|\phi|$ ;  $|\phi| = L_u^* \phi$ ,  $\phi = L_u |\phi|$ .

Sei  $\tilde{\pi}_{|\phi|}$  die Fortsetzung der Darstellung  $\pi_{|\phi|}$  von

${}_K A_{\min} \otimes M_n$  auf  ${}_K A_{\min}^{**} \otimes M_n$ .

Sei  $W_1: H_t \longrightarrow \overline{H_{|\phi|}}$  definiert durch

$$W_1(\pi_t(y)\xi_t) := \tilde{\pi}_{|\phi|}((\mathbb{1} \otimes y)u^*)\xi_{|\phi|}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \|W_1(\pi_t(y)\xi_t)\|^2 &= (\tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes y)u^*)\xi_{|\phi|} | \tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes y)u^*)\xi_{|\phi|}) \\
 &= (\pi_{|\phi|}(u(1 \otimes y^*y)u^*)\xi_{|\phi|} | \xi_{|\phi|}) \\
 &= |\phi|(u(1 \otimes y^*y)u^*) \\
 &\leq n \|\phi\| \langle t, y^*y \rangle \\
 &= \min(T) \|\pi_t(y)\xi_t\|^2,
 \end{aligned}$$

d.h.  $\|W_1\| \leq \min(T)^{1/2}$ . Setze  $W := W_1 J$ .

Sei  $\pi(x) := \pi_{|\phi|}(x \otimes 1) \in \mathcal{L}(\overline{H_{|\phi|}})$   $\forall x \in A$ . Dann ist für  $x \in A$ ,  $a, b \in M_n$ :

$$\begin{aligned}
 & (W^* \pi(x) V \pi_t(a) \xi_t | \pi_t(b) \xi_t) \\
 &= (\pi(x) V \pi_t(a) \xi_t | W \pi_t(b) \xi_t)_{H_{|\phi|}} \\
 &= \overline{(\tilde{\pi}_{|\phi|}(x \otimes 1) \tilde{\pi}_{|\phi|}(1 \otimes a^*) \xi_{|\phi|} | \tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes b^*)u^*) \xi_{|\phi|})}_{H_{|\phi|}} \\
 &= \overline{(\tilde{\pi}_{|\phi|}(u(x \otimes ba^*)) \xi_{|\phi|} | \xi_{|\phi|})} \\
 &= \overline{|\phi|(u(x \otimes ba^*))} \\
 &= \overline{\phi(x \otimes ba^*)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{\langle j_t(T(x)), ba^* \rangle} \\
 &= \overline{(\pi_t(T(x)) \pi_t(b) \pi_t(a^*) \xi_t | \xi_t)} \\
 &= (\pi_t(T(x)) \pi_t(a) \xi_t | \pi_t(b) \xi_t),
 \end{aligned}$$

d.h.  $W^* \pi(x) V = \pi_t(T(x)).$

KOROLLAR 1:  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(A)$  gilt:

$$T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x) \leq \min(T) |T|^{(m)}(x^* x).$$

KOROLLAR 2:  $\|T\|_\infty \leq \min(T).$

Beweis: Sei  $x \in M_m(A), \|x\| \leq 1$ . Dann ist

$$\|T^{(m)}(x)\|^2 = \|T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x)\|$$

$$\leq \min(T) \|T\|.$$

Es ist aber  $\langle |T|(\mathbb{1}), R_a \text{tr} \rangle = n \langle |T|(\mathbb{1})a, j_t(\mathbb{1}) \rangle$

$$= n \langle j_t | T | (1)a, 1 \rangle_{(4.2)} = n \langle j_t | T | (1), a \rangle = n \| \phi | (1 \otimes a) \\ \leq n \| \phi \| \operatorname{tr}(a) \leq \min(T) \quad \forall a \in M_n^+, \operatorname{tr}(a) \leq 1.$$

Folglich ist  $\|T\| \leq \min(T)$ . Daraus folgt die Behauptung. ■

KOROLLAR 3: Die Normen  $\min(\cdot)$  und  $\|\cdot\|_\infty$  sind äquivalent auf  $\mathcal{L}(A, M_n)$ .

Beweis: Es ist  $\forall T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ :

$$\|T\|_\infty \leq \min(T) = n \| \phi \| \leq n \| T^{(n)} \| \leq n \| T \|_\infty. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION: (5.6) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  selbstadjungiert ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(A)$ :

$$T^{(m)}(x)^* T^{(m)}(x) \leq \|T\| \|T\|^{(m)}(x^* x).$$

Beweis: Wie in 5.4 ergibt sich  $\pi_t(T(x)) = W^* \pi(x) V$   $\forall x \in A$ . Es ist zu zeigen:  $\|W\| \leq \|T\|^{1/2}$ .

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \phi^*(x) = \overline{\phi(x^*)} \\
 &= \overline{|\phi|(ux^*)} = |\phi|(xu^*) \\
 &= |\phi|(uu^*xu^*) \\
 &= \phi_0(u^*x)
 \end{aligned}$$

mit  $\phi_0(x) = |\phi|(uxu^*)$  ( $x \in {}_k A \otimes_{m_{ii}} M_n$ ). Aus der Eindeutigkeit der polaren Zerlegung von  $\phi$  folgt daher  $u = u^*$  und  $\phi_0 = |\phi|$ . Es ist dann für  $y \in M_n$ :

$$\begin{aligned}
 \|w_1(\pi_t(y)\xi_t)\|^2 &= |\phi|(u(1 \otimes y^*y)u^*) \\
 &= |\phi|(1 \otimes y^*y) = \langle j_t |T| (1), y^*y \rangle \\
 &= \langle |T| (1)_{y^*y}, t \rangle \\
 &\leq \| |T| (1) \| t(y^*y) \\
 &= \| |T| \| \|\pi_t(y)\xi_t\|^2.
 \end{aligned}$$

Damit folgt  $\|w\| \leq \| |T| \|^{1/2}$ . ■

KOROLLAR: Ist  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  selbstadjungiert, so gilt:

$$\|T\|_\infty \leq \| |T| \|.$$

THEOREM:(5.7) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T, S \in \mathcal{L}(A, M_n)$   
 $(n \in \mathbb{N})$ . Dann gilt  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in M_m(A)$ :

$$| |T+S|^{(m)}(x) |^2 \leq (\min(T) + \min(S)) (|T|^{(m)}(x^*x) + |S|^{(m)}(x^*x)).$$

Beweis: Sei  $\phi := \phi^t(T)$  und  $\psi := \phi^t(S)$ . Betrachte  
 $H := \overline{H_\phi} \oplus \overline{H_\psi}$ . Sei  $V: H_t \longrightarrow H$  definiert durch

$$V(\pi_t(a)\xi_t) := (\pi_\phi(1 \otimes a^*)\xi_\phi, \pi_\psi(1 \otimes a^*)\xi_\psi)$$

$(a \in M_n)$ .  $V$  ist stetig. Für  $x \in A$  sei  $\pi(x) := \pi_\phi \oplus \pi_\psi(x \otimes 1)$ .  
 Dann gilt  $\forall a, b \in M_n$ :

$$\begin{aligned} & (V^* \pi(x) V \pi_t(a)\xi_t | \pi_t(b)\xi_t) \\ &= (\pi(x) V \pi_t(a)\xi_t | V \pi_t(b)\xi_t) \\ &= (\pi(x) (\pi_\phi(1 \otimes a^*)\xi_\phi, \pi_\psi(1 \otimes a^*)\xi_\psi) | (\pi_\phi(1 \otimes b^*)\xi_\phi, \pi_\psi(1 \otimes b^*)\xi_\psi)) \\ &= \overline{|\phi|(x \otimes ba^*)} + \overline{|\psi|(x \otimes ba^*)} \\ &= \overline{\langle j_t |T|(x), ba^* \rangle} + \overline{\langle j_t |S|(x), ba^* \rangle} \\ &= \overline{(\pi_t(|T|(x)) \pi_t(b)\pi_t(a^*)\xi_t | \xi_t)} \\ &\quad + \overline{(\pi_t(|S|(x)) \pi_t(b)\pi_t(a^*)\xi_t | \xi_t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi_t(|T|(x))J\pi_t(b)J\pi_t(a)\xi_t|\xi_t) \\
 &\quad + (\pi_t(|S|(x))J\pi_t(b)J\pi_t(a)\xi_t|\xi_t) \\
 &= (\pi_t((|T|+|S|)(x))\pi_t(a)\xi_t|\pi_t(b)\xi_t),
 \end{aligned}$$

d.h.  $\pi_t((|T|+|S|)(x)) = V^*\pi(x)V$ . - Sei nun

$W: H_t \longrightarrow H$  definiert durch:

$$W(\pi_t(a)\xi_t) := (\tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes a^*)wu^*)\xi_{|\phi|}, \pi_{|\psi|}((1 \otimes a^*)wv^*)\xi_{|\psi|});$$

Dabei sei  $u, v$  bzw.  $w$  die partielle Isometrie der

polaren Zerlegung von  $\phi, \psi$  bzw.  $(\phi+\psi)$ . Es ist  $u, v, w$

$\in {}_k A_{\min}^{**} \otimes M_n$  und  $\phi = L_u |\phi|$ ,  $\psi = L_v |\psi|$ ,  $|\phi+\psi| = L_w^*(\phi+\psi)$ .

$\tilde{\pi}_{|\phi|}$  bzw.  $\pi_{|\psi|}$  sei die Fortsetzung der Darstellung  $\pi_{|\phi|}$

bzw.  $\pi_{|\psi|}$  von  ${}_k A_{\min} \otimes M_n$  auf  ${}_k A_{\min}^{**} \otimes M_n$ . Es ist dann für

$a \in M_n$ :

$$\|W(\pi_t(a)\xi_t)\|^2 = (W(\pi_t(a)\xi_t)|W(\pi_t(a)\xi_t))$$

$$= (\tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes a^*)wu^*)\xi_{|\phi|}|\tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes a^*)wu^*)\xi_{|\phi|})$$

$$+ (\pi_{|\psi|}((1 \otimes a^*)wv^*)\xi_{|\psi|}|\pi_{|\psi|}((1 \otimes a^*)wv^*)\xi_{|\psi|})$$

$$= |\phi|(uw^*(1 \otimes aa^*)wu^*) + |\psi|(vw^*(1 \otimes aa^*)wv^*)$$

$$\leq \|\phi\| \|aa^*\| + \|\psi\| \|aa^*\|$$

$$\leq n\|\phi\| \langle a^*a, t \rangle + n\|\psi\| \langle a^*a, t \rangle$$

$$= (\min(T) + \min(S)) \|\pi_t(a) \xi_t\|^2,$$

d.h.  $\|W\|^2 \leq \min(T) + \min(S)$ .

Schließlich ist  $\forall a, b \in M_n, \forall x \in A$ :

$$\begin{aligned} & (W^* \pi(x) V \pi_t(a) \xi_t | \pi_t(b) \xi_t) \\ &= (\pi(x) V \pi_t(a) \xi_t | W \pi_t(b) \xi_t) \\ &= (\tilde{\pi}_{|\phi|}(x \otimes a^*) \xi_{|\phi|} | \tilde{\pi}_{|\phi|}((1 \otimes b^*) w u^*) \xi_{|\phi|}) \\ &\quad + (\tilde{\pi}_{|\psi|}(x \otimes a^*) \xi_{|\psi|} | \tilde{\pi}_{|\psi|}((1 \otimes b^*) w v^*) \xi_{|\psi|}) \\ &= \overline{|\phi| (u w^* (x \otimes b a^*))} + \overline{|\psi| (v w^* (x \otimes b a^*))} \\ &= \overline{L_{W^*} \phi(x \otimes b a^*)} + \overline{L_{W^*} \psi(x \otimes b a^*)} \\ &= \overline{|\phi + \psi| (x \otimes b a^*)} \\ &= \overline{\langle j_t(|T+S|(x)), b a^* \rangle} \\ &= \overline{(J \pi_t(|T+S|(x)) J \pi_t(b) \pi_t(a^*) \xi_t | \xi_t)} \\ &= (\pi_t(|T+S|(x)) J \pi_t(b) J \pi_t(a) \xi_t | \xi_t) \\ &= (\pi_t(|T+S|(x)) \pi_t(a) \xi_t | \pi_t(b) \xi_t), \end{aligned}$$

d.h.  $\pi_t(|T+S|(x)) = W^*(x)V \quad \forall x \in A$ . Daraus folgt die Behauptung. ■

THEOREM: (5.8) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Operatoren in  $\mathcal{L}(A, M_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $T_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} T \in \mathcal{L}(A, M_n)$ . Dann gilt:  $|T_m| \xrightarrow{\|\cdot\|} |T|$ .

Beweis: Sei  $\phi := \phi^t(T)$ ,  $\phi_m := \phi^t(T_m)$ . Dann gilt:

$$\|\phi - \phi_m\| \leq \|T - T_m\|_\infty. \quad (5.2)$$

Folglich hat man:  $\phi_m \longrightarrow \phi$  und  $|\phi_m| \longrightarrow |\phi|$  ([32]: III, 4.10). Demnach gilt für  $x \in A$ ,  $a \in M_n$ :

$$\begin{aligned} & | \langle (|T| - |T_m|)(x), R_a \text{tr} \rangle | \\ &= | \langle |T|(x)a, \text{tr} \rangle - \langle |T_m|(x)a, \text{tr} \rangle | \\ &= n | \langle j_t |T|(x), a^* \rangle - \langle j_t |T_m|(x), a^* \rangle | \quad (4.2) \\ &= n | |\phi|(x \otimes a^*) - |\phi_m|(x \otimes a^*) | \\ &= n | (|\phi| - |\phi_m|)(x \otimes a^*) | \\ &\leq n \| |\phi| - |\phi_m| \| \|x\| \|a\| \\ &\leq n \| |\phi| - |\phi_m| \| \|x\| \text{tr}(|a|) \end{aligned}$$

$$= n \|\phi\| - \|\phi_m\| \|\text{xx}\| R_a \text{tr} \};$$

also konvergiert  $(\|T_m\|)_{m \in \mathbb{N}}$  gegen  $\|T\|$ .

DEFINITION:(5.9) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) selbstadjungiert.  $T = T^+ - T^-$  heißt die Jordan-Zerlegung von  $T$ .

PROPOSITION:(5.10) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\min(T) = \min(T^+) + \min(T^-).$$

Die Zerlegung  $T = T^+ - T^-$  ist dadurch eindeutig bestimmt, d.h. gibt es vollständig positive Operatoren  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(A, M_n)$  mit  $T = T_1 - T_2$  und  $\min(T) = \min(T_1) + \min(T_2)$ , so folgt  $T_1 = T^+$ ,  $T_2 = T^-$ .

Beweis: Sei  $\phi := \phi^t(T)$ . Dann ist

$$\min(T) = n \cdot \|\phi\| = n \|\phi^+\| + n \|\phi^-\|$$

$$= \min(T^+) + \min(T^-).$$

Weiter folgt aus  $\min(T) = \min(T_1) + \min(T_2)$ :

$$\|\phi\| = \|\phi^t(T_1)\| + \|\phi^t(T_2)\|.$$

Weil  $\phi = \phi^t(T_1) - \phi^t(T_2)$  und  $\phi^t(T_1), \phi^t(T_2) \geq 0$ ,  
folgt die Behauptung ([24]: 3.2.5). ■

Schließlich sei hier noch ein Satz vom Radon-  
Nikodym-Typ für vollständig positive Operatoren be-  
wiesen. Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $T \in \mathcal{L}(A, M_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  
und  $\phi := \phi^t(T)$  die zu  $T$  gehörige Linearform auf  
 ${}_k A \otimes M_n$ . Sei  $a := \sum_{ij} a_{ij} \otimes e_{ij} \in {}_k A \otimes M_n$ . Betrachte die  
Linearformen  $L_a \phi, R_a \phi$ . Sei nun  $L_a T$  (bzw.  $R_a T$ ) der-  
jenige Operator in  $\mathcal{L}(A, M_n)$  mit

$$L_a T(x) := \sum_{ij} e_{ji} T(a_{ij} x) \quad (\text{bzw.}$$

$$R_a T(x) := \sum_{ij} T(x a_{ij}) e_{ji}).$$

Sei  $x \otimes y \in {}_k A \otimes M_n$ . Dann ist:

$$\phi^t(L_a T)(x \otimes y) = \langle j_t(L_a T(x)), y \rangle$$

$$= \langle j_t(\sum_{ij} e_{ji} T(a_{ij} x)), y \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle j_t T(a_{ij}x), e_{ij}y \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \phi(a_{ij}x \otimes e_{ij}y)$$

$$= L_a \phi(x \otimes y).$$

Ebenso folgt  $\phi^t(R_a T) = R_a \phi$ .

PROPOSITION: (5.11) Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $S, T, T-S \in \mathcal{L}(A, M_n)$  vollständig positiv ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gibt es ein positives Element  $a \in {}_k A^{**} \otimes_{\mu} M_n$  mit  $0 \leq a \leq 1$  und

$$S(x) = L_a R_a T^{**}(x) \quad \forall x \in A.$$

Beweis: Zum Beweis genügt der Hinweis auf [25]: 1.24.3 und die obigen Überlegungen. ■

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Akemann, C.A.; P.A.Ostrand: On a tensor product  $C^*$ -Algebra associated with the free group on two generators. J. Math. Soc. Japan 27(1975), S.589-599.
- [2] Alfsen, E.M.: Facial structure of compact convex sets. Proc. London Math. Soc. 18(1968), S.385-404.
- [3] Alfsen, E.M.; T.B.Anderson: Split faces of compact convex sets. Proc. London Math. Soc. 21 (1970), S.415-442.
- [4] Archbold, R.J.: On the centre of a tensorproduct of  $C^*$ -Algebras. J. London Math. Soc. (2), 10 (1975), S.257-262.
- [5] Arveson, W.: Subalgebras of  $C^*$ -Algebras. Acta Math. 123(1969), S.141-224.
- [6] Blackadar, B.E.: Weak expectations and nuclear  $C^*$ -Algebras. Indiana Univ. Math. J. 27(1978), S. 1021-1026.

- [7] Choi, M.-D.; E.G.Effros: Injektivty and operator spaces. J. Funct. Anal. 24(1977), S.156-209.
- [8] Choi, M.-D.; E.G.Effros: Nuclear  $C^*$ -Algebras and injektivty. The general case. Indiana Univ. Math. J. 26(1977), S.443-446.
- [9] Choi, M.-D.; E.G.Effros: Nuclear  $C^*$ -Algebras and the approximation property. Amer. J. Math. 100(1978), S.61-79.
- [10] Choi, M.-D.; E.G.Effros: Separable nuclear  $C^*$ -Algebras and injektivty. Duke Math. J. 43 (1976), S.309-322.
- [11] Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateur dans l'espace Hilbertien. 2. ed. Paris: Gauthier-Villars 1969.
- [12] Dixmier, J.:  $C^*$ -Algebras. Amsterdam [u.a.]: North Holland Publishing Comp. 1977.
- [13] Effros, E.G.: Notes for a lecture given at the second U.S. Japan Seminar on  $C^*$ -Algebras and Applications to Physics, April 1977.

- [14] Effros, E.G.: Order ideals in a  $C^*$ -Algebra and its dual. Duke Math. J. 30(1963), S.391-411.
- [15] Effros, E.G.; C.Lance: Tensor products of operator algebras. Adv. Math. 25(1977), S.1-34.
- [16] Grothendieck, A.: Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Math. Sao Paulo 8(1956), S.1-79.
- [17] Guichardet, A.: Tensorproducts of  $C^*$ -Algebras. Sov. Math. Dokl. 6(1965), S.210-213.
- [18] Lance, C.: On nuclear  $C^*$ -Algebras. J. Funct. Anal. 12(1973), S.157-176.
- [19] Lance, C.: Tensor products and nuclear  $C^*$ -Algebras. Text for a survey lecture at the American Mathematical Society's Summer Research Institute on operator algebras and applications, Kingston, Ontario, July 1980.
- [20] Lance, C.: Tensorproducts of non-unital  $C^*$ -Algebras. J. London Math. Soc. (2) 12(1976), S.160-168.

- [21] Loeb1, R.I.: A Hahn decomposition for linear maps. Pac. J. Math. 65(1976), S.119-133.
- [22] Namioka, I.; R.R.Phelps: Tensorproducts of compact convex sets. Pac. J. Math. 31(1969), S.469-480.
- [23] Okayasu, T.: On the tensor products of  $C^*$ -Algebras. Tôhoku Math. J. 18(1966), S.325-331.
- [24] Pedersen, G.K.:  $C^*$ -Algebras and their automorphism groups. London [u.a.]: Acad. Pr. 1979. (LMS Monographs. 14.)
- [25] Sakai, S.:  $C^*$ -Algebras and  $W^*$ -Algebras. Berlin; New York: Springer 1971. (Ergebnisse der Mathematik. No. 60.)
- [26] Schlotterbeck, U.: Tensorprodukte von Banach-Verbänden und positive Operatoren. Habil.-Schr., Tübingen [1974].
- [27] Smith, R.R.: Completely bounded maps between  $C^*$ -Algebras. Preprint.
- [28] Smith, R.R.; J.D.Ward: The geometric structure of generalized state spaces. Preprint.

- [29] Størmer, E.: Positive linear maps of operator algebras. Acta Math. 110(1963), S.233-278.
- [30] Stratila, S.; L.Zsidó: Lectures on von Neumann-Algebras. Turnbridge Wells: Abacus Pr. 1979.
- [31] Takesaki, M.: On the cross-norm of the direct product of  $C^*$ -Algebras. Tôhoku Math. J. 16 (1964), S.111-122.
- [32] Takesaki, M.: Theory of operator algebras I. New York [u.a.]: Springer 1979.
- [33] Turumaru, T.: On the direct product of operator algebras I. Tôhoku Math. J. 4(1952), S.242-251.
- [34] Turumaru, T.: On the direct product of operator algebras II. Tôhoku Math. J. 5(1952), S.1-7.
- [35] Turumaru, T.: On the direct product of operator algebras III. Tôhoku Math. J. 6(1954), S.208-211.
- [36] Turumaru, T.: On the direct product of operator algebras IV. Tôhoku Math. J. 8(1956), S.281-285.
- [37] Vincent-Smith, G.F.: On the centre of the tensor-product of  $A(K)$ -spaces and  $C^*$ -Algebras. Quart. J. Math. Oxford (2) 28(1977), S.87-91.

- [38] Wassermann, S.: On tensor products of certain group  $C^*$ -Algebras. J. Funct. Anal. 23(1976), S.239-254.
  
- [39] Wittstock, G.: Ein operatorwertiger Hahn-Banach Satz. J. Funct. Anal. 40(1981), S.127-150.
  
- [40] Wulfsohn, M.A.: Produit tensoriel de  $C^*$ -Algebres. Bull. Sc. math. (2) 87(1963), S.13-27.

## Lebenslauf

Am 28. Juli 1953 wurde ich, Hartmut Zillmann, in Schötmar (jetzt Bad Salzuflen) geboren. Die dortige Volksschule besuchte ich ab 1960. Ich wechselte 1964 zur Jacobi-Realschule Hohenhausen und 1966 zum Engelbert-Kämpfer-Gymnasium Lemgo, an dem ich 1972 das Abitur bestand. Nach meiner Wehrdienstzeit begann ich im Sommersemester 1974 mit dem Studium der Mathematik, der Philosophie und der Geschichte an der Universität Tübingen. Am 30. 5. 1980 bestand ich die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien. Seit dem 1. 4. 1982 bin ich Bibliotheksreferendar an der Universitätsbibliothek Tübingen.

Meine akademischen Lehrer im Fach Mathematik waren die Herren G. Betsch, S. Breitsprecher, H. Fischer, F. Locher, R. Nagel, H. Salzmann, H. H. Schaefer, U. Schlotterbeck, E. Siebert, O. Tamaschke, A. Wolf, M. Wolff.





